THÉORÈME DE HAAR.

Gabriel Mastrilli

8 avril 2021

On considère $C([a,b])$, l'ensemble des fonction continue sur $[a,b]$ et à valeur dans $\mathbb{C}$, muni de la norme uniforme, notée $\|\|$.

Existence d'un projeté sur un sev de dimension finie. On cherche à approcher une fonction $f \in C([a,b])$ par un élément d'un sous-espace vectoriel F de $C([a,b])$ de dimension finie. Par un argument de compacité (puisque F est de dimension finie), pour tout $f \in C([a,b])$ il existe un élément $q \in F$ tel que $d(f,F) = \|f - q\|$.

Unicité de ce projeté. Le théorème de Haar donne une CNS d'unicité de ce projeté.

Théorème 1

Soit F un sev de $C([a,b])$ de dimension finie n. Alors les assertions suivante sont équivalentes :

1. *pour tout $f \in C([a,b])$, il existe* ***un unique*** *$q \in F$ tel que $\|f - q\| = d(f,F)$.*
2. *pour tout $q \in F$ et tout $a \leq t_1, \dots, t_n \leq b$ tel que $q(t_i) = 0$ pour tout $i = 1, \dots, n$, alors q est nul.*

(1) implique (2) : On raisonne par contraposé et on suppose que (2) n'est pas vérifié. Construisons f qui admettra plusieurs projetés. On commence par un lemme de dualité.

Lemme 2 (*Dualité*)

S'il existe $a \leq t_1, \dots, t_n \leq b$ et $q_0 \in F$ non nul tel que $q(t_i) = 0$ pour tout $i = 1, \dots, n$ alors, la famille $\delta_1, \dots, \delta_n$ est liée dans F^*.

On a noté δ_i la forme linéaire d'évaluation en t_i.

Démonstration : Par l'absurde, supposons $\delta_1, \dots, \delta_n$ libre. Alors, il s'agit d'une base de F^*. Soit ϕ une forme linéaire sur F qui vaut 1 en q_0 (on la construit en complétant q_0 en une base de F et en considérant le premier vecteur de la base duale associée). Or, ϕ est combinaison linéaire des δ_i. Donc $\phi(q)$ est nul. Ceci est une contradiction. ∎

D'après le lemme précédent, il existe $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ dans $\mathbb{C}$ non tous nuls tel que :

$$(*) \quad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \delta_i = 0$$

On construit une fonction w affine par morceau tel que :

$$w(t_i) = \frac{\bar{\alpha_i}}{|\alpha_i|}, \quad \text{si } \alpha_i \neq 0$$
$$w(t_i) = 0, \quad \text{sinon}$$
$$\|w\| \leq 1$$

Lemme 3 (*Analyse*)

Soit $f := w(1 - \frac{1}{2\|q_0\|}|q_0|)$. Alors $d(f,F) = 1$ et pour tout $0 \leq c \leq \frac{1}{2\|q_0\|}$, $d(f,F) = \|f - cq_0\|$.

Démonstration : Pour tout $q \in F$, d'après $(*)$:

$$\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i w(t_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (f(t_i) - q(t_i))$$

On obtient $d(f,F) \geq 1$ par inégalité triangulaire.

De plus, puisque $|1 - \frac{1}{2\|q_0\|}|q_0|| \leq 1$:

$$d(f, F) \leq \|f - 0\| \leq \|w\| \leq 1$$

Et puisque $0 \leq 1/2 - cq_0$:

$$\|f - cq_0\| \leq \|(1 - \frac{1}{2\|q_0\|}|q_0|) - cq_0\| \leq 1$$

■

Le lemme 3 montre que (1) est fausse. Donc (1) implique (2).

(2) implique (1) : Supposons donc que (2) soit vraie. Soit $f \in C([a, b])$. On peut supposer que f n'est pas dans F (sinon son seul projeté sur F est elle-même). Considérons un projeté q de f sur F. Notons :

$$A = \{t \in [a, b] \mid |f(t) - q(t)| = d(f, F)\}$$

Par compacité, A n'est pas vide.

Lemme 4 (*Dimension finie.*)

Si A contient plus n points, alors il existe $q_0 \in F$ tel que $q_0(t) = f(t)$ pour tout $t \in A$.

Démonstration : Supposons que A contient $s \leq n$ points, que l'on ordonne $t_1 < \cdots < t_s$. Si, $s < n$ complétons $t_1, \ldots, t_n$ pour obtenir n points distincts, $t_1, \ldots, t_n$.

Il suffit de montrer que l'application linéaire suivante est surjective :

$$\Phi : q \in F \mapsto (q(t_1), \ldots q(t_n)) \in \mathbb{C}^n$$

Or, d'après (2), le noyau de Φ est nul. Donc, d'après le théorème du rang Φ est surjective. ■

Lemme 5 (*Analyse.*)

A contient au moins $n + 1$ points.

Démonstration : Par l'absurde, considérons q_0 construite au lemme précédent. Notons $g := f - q$. Soit $\eta > 0$, qui sera choisi petit par la suite pour que $\|g - \eta q_0\| = \|f - (q + \eta q_0)\| < d(f, F)$. Considérons des voisinages ouverts V_i des t_i $(i = 1, \ldots s)$ points de A tel que si $t \in V_i$, alors $|g(t_i) - g(t)| \leq \frac{1}{3}d(f, F)$, $|q_0(t_i) - q_0(t)| \leq \frac{1}{3}d(f, F)$.

Puisque aucun point en dehors des V_i est dans A, alors $\sup_{t \notin \cup V_i} \|g(t)\| < d(f, F)$. Distinguons deux cas :

1. Si $t \notin \cup V_i$, alors :
$$|g(t) - \eta q_0(t)| \leq \sup_{t \notin \cup V_i} \|g(t)\| + c\|q_0\| < d(f, F)$$
pour η assez petit.
2. Si $t \in V_i$, alors, puisque $g(t_i) = q_0(t_i)$:

$$|g(t) - \eta q_0(t)| \leq |g(t) - \eta g(t)| + |\eta g(t) - \eta g(t_i)| + |\eta q_0(t_i) - \eta q_0(t)| \leq (1 - \eta)d(f, F) + \frac{2\eta}{3}d(f, F) < d(f, F)$$

Ceci est contradictoire avec le fait que $\|g - \eta q_0\| \geq d(f, F)$. ■

Pour conclure, considérons q_1 et q_2 tels que $d(f, F) = \|f - q_2\| = \|f - q_1\|$. Soit $q = \frac{q_1+q_2}{2}$. Par inégalité triangulaire, $d(f, F) = \|f - q\|$. Soit $t_1, \ldots, t_n$, n points de l'ensemble A associé à q.

Notons, $a_i = f(t_i) - q_1(t_i)$, $b_i = f(t_i) - q_2(t_i)$. Alors, puisque les t_i sont dans A :

$$|a_i + b_i| = 2d(f, F) \geq |a_i| + |b_i|$$

Il y a donc égalité dans l'inégalité triangulaire. Donc a_i et b_i sont de même signe. Puisque $|a_i| \leq d(f, F)$, $|b_i| \leq d(f, F)$, alors $a_i = b_i$.

Donc $q_1(t_i) = q_2(t_i)$ pour tout $i = 1, \ldots, n$. Donc $q_1 = q_2$. Cela montre (2) implique (1).