42 Théorème des lacunes d'Hadamard

ref : ZQ

Définition: Soit $f(z) = \sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence 1. Un point du cercle $\mathbb{U}$ est dit *régulier* si f admet un prolongement analytique sur un voisinage de ce point, il est dit *singulier* sinon.

La première remarque est que tous les points du bord ne peuvent être réguliers, sinon f aurait un prolongement analytique sur un disque de rayon $1+\epsilon$ (par compacité du cercle) et d'après la formule de Cauchy, f étant holomorphe admet un développement en série entière $\sum b_n z^n$ de rayon $1+\epsilon$. (on utilise ici holomorphe implique analytique avec DSE sur le plus grand disque possible). Par unicité du développement, $a_n = b_n$ est la série $\sum a_n z^n$ est de rayon > 1, contradiction.

On donne maintenant une condition suffisante pour que tous les points du bord soient singuliers.

Théorème 42.1 (Lacunes d'Hadamard) *Soit $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ une suite d'entiers > 0 tels que $\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} \geq \alpha > 1$. Soit une série entière $\sum a_n z^{\lambda_n}$ de rayon de convergence 1. Alors tous les points du bord sont singuliers.*

Preuve. idée : la série entière est de rayon 1 bien qu'elle soit lacunaire, c'est donc que ses coefficients non nuls sont trop gros pour que la fonction s'étende analytiquement. On va donc supposer par l'absurde qu'un point est régulier (1) et on va montrer qu'alors le rayon doit être strictement plus grand que 1, contradiction.

Si on montre que 1 est singulier, alors pour tout $e^{i\theta} \in \mathbb{U}$, la série $\sum a_n e^{i\theta\lambda_n} z^{\lambda_n}$ est toujours de rayon 1 car la taille des coefficients n'a pas changé et toujours lacunaire, donc 1 est singulier pour cette série, c'est-à-dire $e^{i\theta}$ est singulier pour la série initiale $\sum a_n z^{\lambda_n}$.

Supposons donc que f admet un prolongement analytique sur l'ouvert $\Omega = D \cup D(1,\eta)$.

Comme $\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} \geq \alpha > 1$, on peut trouver $p \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{p+1}{p} \leq \alpha$ et donc $p\lambda_{n+1} \geq (p+1)\lambda_n$.

On introduit alors la fonction

$$\varphi(z) = \frac{z^{p+1} + z^p}{2}$$

qui a deux vertus : elle envoie un disque $D(0, 1+\epsilon)$ dans Ω, et $\varphi(z)^{\lambda_n}$ et $\varphi(z)^{\lambda_{n+1}}$ sont des polynômes de degrés disjoints.

En effet, si $z \in \overline{D}\{1\}$, $\frac{|z^p(z+1)|}{2} < 1$ et $\varphi(1) = 1$. Donc $\varphi(\overline{D}) \subset \Omega$ mais comme $\overline{D}$ est compact, Ω ouvert et φ continue, on peut trouver $\epsilon > 0$ tel que $\varphi(\overline{D}(0, 1+\epsilon)) \subset \Omega$.

La fonction $g \circ \varphi$ est donc holomorphe sur $D(0, 1+\epsilon)$ comme composée de deux fonctions holomorphes. Par la formule de Cauchy, $g \circ \varphi$ admet un développement en série entière centré en 0 de rayon $\geq 1+\epsilon$:

$$g \circ \varphi(z) = \sum b_n z^n$$

Par unicité du développement en série entière et comme il n'y a pas de mélange entre les $(\frac{z^p+z^{p+1}}{2})^{\lambda_n}$ pour différentes valeurs de n, on peut écrire pour $N \in \mathbb{N}$ et $z \in \mathbb{C}$,

$$\sum_{n=0}^{N} a_n (\frac{z^p + z^{p+1}}{2})^{\lambda_n} = \sum_{n=0}^{(p+1)\lambda_N} b_n z^n$$

En prenant $z \in]1, 1+\epsilon[$, et en faisaint tendre N vers l'infini, on aboutit à une contradiction :

- Le premier membre diverge grossièrement car $|\frac{z^p+z^{p+1}}{2}| > 1$ et la série $\sum a_n z^{\lambda_n}$ est de rayon 1.

– Le second membre converge car $|\frac{z^p+z^{p+1}}{2}| < (1+\epsilon)$ et la série $\sum b_n z^n$ est de rayon $\geq 1+\epsilon$.
Leçons concernées : prolongement de fonction, séries entières, fonctions holomorphes. $\square$