

Exp: $M_n(\mathbb{C}) \rightarrow GL_n(\mathbb{C})$ est surjective

(20)

Soit $A \in GL_n(\mathbb{C})$. On note $\mathbb{C}[A]^* = \mathbb{C}[A] \cap GL_n(\mathbb{C})$

1) $\mathbb{C}[A]^*$ est un groupe: Il suffit de vérifier que $B \in \mathbb{C}[A]^* \Rightarrow B^{-1} \in \mathbb{C}[A]^*$. Or B^{-1} est un polynôme en B comme on peut le voir par Cayley-Hamilton. Comme B est un polynôme en A , $\mathbb{C}[A]^*$ est un gpe.

2) Si $B \in \mathbb{C}[A]$, $e^B \in \mathbb{C}[A]$: car $\mathbb{C}[A]$ est un sev de $M_n(\mathbb{C})$ de dimension finie, il est donc fermé. ainsi $e^B = \lim_{n \rightarrow +\infty} \underbrace{\sum_{k=0}^n \frac{B^k}{k!}}_{\in \mathbb{C}[A]} \in \mathbb{C}[A]$.

3) $\mathbb{C}[A]^*$ est connexe par arc: Si $B, C \in \mathbb{C}[A]^*$, le polynôme $P(z) = \det((1-z)B + zC)$, qui ne s'annule pas en 0 ni en 1 a un nombre fini de racines dans $\mathbb{C}$. Un chemin qui va de 0 à 1 sans passer par ces racines fournit un chemin reliant B à C dans $\mathbb{C}[A]^*$.

4) Exp: $(\mathbb{C}[A], +) \mapsto (\mathbb{C}[A]^*, \times)$ est un morphisme C^∞ . La différentielle de Exp en 0 est la matrice identité, qui est inversible.

Par le théorème des fonctions ^{inversion locale} implicites, il existe U, V , voisinages de 0 et I tels que $\exp|_U^V$ soit un ^{dans $\mathbb{C}[A]$} ^{dans $\mathbb{C}[A]^*$} homéomorphisme. En particulier $V \subset \exp(\mathbb{C}[A])$.

5) $\exp(\mathbb{C}[A])$ est un sg de $\mathbb{C}[A]^*$ qui contient un voisinage de l'identité, par translation c'est un

sg ouvert de $\mathbb{C}[A]^*$, muni G .

On a : $\mathbb{C}[A]^* \setminus G = \bigcup_{B \notin G} BG$ est ouvert.

Ainsi G est un ouvert fermé du complexe $\mathbb{C}[A]^*$,
il vaut $\mathbb{C}[A]^*$, et $A \in \text{ImExp}$.

$$G \setminus H = \bigcup_{x \notin H} xH.$$

$$\text{soit } y \in G \setminus H,$$

$$y \in yH \subset \bigcup_{x \notin H} xH.$$

$$\text{exp: } \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*$$

impl.

l'inv. locale, $\exists V$ ouvert, $1 \in V$ tq.

Imexp: gpe.

$$V \subset \text{Imexp}.$$

$$\mathbb{C}^* \setminus \text{Imexp} = \bigcup_{z \notin \text{Imexp}} z \text{Imexp}.$$

↗
ouvert.