$\boxed{\text{Fonctions récursives} \Leftrightarrow \text{Turing calculable}}$

Réf : Autebert : Calculabilité et décidabilité

Th : Une fonction est Turing calculable ssi elle est récursive.
De plus, elle peut être définie avec un seul schéma de minimisation non borné.

Démo On montre d'abord l'équivalence

$\boxed{\Leftarrow}$
- Les fonctions de base sont bien Turing calculable : $0, s, \pi_k$
- On peut composer des fonctions Turing calculable
- Le schéma de récurrence peut être encodé avec une boucle for
- Le schéma de minimisation peut être encodé avec une boucle while

$\boxed{\Rightarrow}$
- Soit f une fonction Turing calculable, réalisée par une machine de Turing $M = (\Sigma_1, Q, \delta, q_0)$ standardisée et normalisée à un seul état d'arrêt q_N.
- On suppose que $|\Sigma| = 3$: un alphabet d'écriture de taille 2 et un symbole blanc, on les assimile aux chiffres 0 (blanc), 1, 2.

  Ainsi, un bout du ruban peut être vu comme l'écriture d'un entier en base 3.
- Comme δ est une fonction définie par cas (ie à support fini), donc on peut construire les 3 fonctions récursives suivantes : si $\delta(q,x) = (y, q', m)$
  - $\delta\_ECRIRE(q,x) = y$
  - $\delta\_ETAT(q,x) = q'$ (les états sont représenté par des entiers via une num standard)
  - $\delta\_MOUV(q,x) = m$ (0 si $\leftarrow$, 1 si $\rightarrow$)

- On construit maintenant par récurrence simultanée un certain nombre de fonctions qui décrivent la configuration de la machine après k pas de calcul :
  - $ETAT(\omega, k) = q$ si q est l'état de M après k pas de calcul sur ω
  - $G(\omega, k) = x$ si est la partie à gauche de la tête de lecture
  - $D(\omega, k) = x$ —— à droite

$$\underbrace{\cdots \mid x_{-1} \mid x_{-0}}_{G(\omega,k) = \sum_{k=0}^{+\infty} x_{-k} 3^k} \mid q \mid \underbrace{x_0 \mid x_1 \mid x_2}_{D(\omega,k) = \sum_{i=0}^{+\infty} x_i 3^i} \mid \cdots$$

(sommes finies en réalité)

Par commodité, on utilisera la fonction lettre définie par
$L(w,k) = x$ si x est la lettre sous la tête de lecture.
↳ On a clairement $L(w,k) = D(w,k) \bmod 3$

- Pour $k=0$, le calcul n'est pas commencé, d'où
  * $ETAT(w,0) = q_0$
  * $G(w,0) = 0$
  * $D(w,0) = w$

- Récurrence simultanée :
  * $ETAT(w,k+1) = \delta\_ETAT(ETAT(w,k), L(w,k))$
  * $G(w,k+1) = \begin{cases} G(w,k) \div 3 & \text{si } \delta\_MOUV(ETAT(w,k), L(w,k)) = 0 \ (\leftarrow) \\ G(w,k) \times 3 + \delta\_ECRIRE(ETAT(w,k), L(w,k)) & \text{sinon} \end{cases}$
  * $D(w,k+1) = \begin{cases} D(w,k) \div 3 & \text{si } \delta\_MOUV(ETAT(w,k), L(w,k)) = 1 \ (\rightarrow) \\ D(w,k) \times 3 + \delta\_ECRIRE(ETAT(w,k), L(w,k)) & \text{sinon} \end{cases}$

- Ainsi, les fonctions ETAT, G, D sont primitives récursives, étant définie par récurrence simultanée à l'aide de fct primitives récursives.
Le calcul s'arrête si il existe un entier k tq $ETAT(w,k) = q_N$.
On a alors le résultat sur la bande, d'où
$$f(w) = D(w, \mu k[ETAT(w,k) = q_N])$$

$\square$

$\boxed{\text{Coro}}$ Soit f une fct récursive, alors elle est Turing calculable par M.
D'après la construction ci-dessus, la fct que calcule M, càd f, est récursive et définissable avec un seul schéma de minimisation non-bornée.

$\square$