Constructivité de la logique intuitionniste

Réf : DNR : Introduction à la logique

Prop : (i) Les sequents ($\vdash_{LK}$) et ($\vdash_{LJ}$) ne sont pas dérivables
(ii) Si $A \in Atom$, alors ($\vdash_{LK} A$) n'est pas dérivable
(iii) Si $A \in Atom \setminus \{\bot\}$ alors ($A \vdash_{LK}$) et ($\vdash_{LK} \neg A$) ne sont pas dérivables

Dém (i) Immédiat d'après l'élimination des coupures et les règles de LK, LJ
(ii) Puisque A est un atome, la seule règle qu'on peut utiliser est soit l'affaiblissement, soit une contraction, ce qui donnerait une preuve de ($\vdash$) ou de ($\vdash A, A$)
On prend le plus petit arbre de preuve qui prouve un séquent de la forme ($\vdash \underbrace{A, ..., A}_{n\,fois}$) et on a donc ($\vdash \underbrace{A, ..., A}_{k\,fois}$).

On regarde la dernière règle de π :
* c'est soit une contraction, mais dans ce cas on a une preuve plus courte de ($\vdash A^{k+1}$)
* soit un affaiblissement et c'est une preuve plus courte de ($\vdash A^{k-1}$)

(et le cas $k=0$ est exclus grâce à (i))

Ainsi, ($\vdash_{LK} A$) n'est pas dérivable si A est un atome

(iii) • En procédant de même, on montre que ($A \vdash_{LK}$) n'est pas dérivable quand A est un atome $\neq \bot$
• ~~Si l'arbre de preuve n'utilise pas la règle $\neg d$, on montre de même que ce n'est pas possible. S'il utilise $\neg d$, on a un séquent de la forme $A \vdash \neg A^k$; ce qui permet de dériver le séquent~~
• De même, on prend le plus petit arbre de preuve qui prouve un séquent de la forme $A^k \vdash \neg A^l$ et on aboutit à une contradiction.

□

Prop : Si ($\vdash_{LJ} A_1 \vee A_2$) alors ($\vdash_{LJ} A_1$) ou ($\vdash_{LJ} A_2$)

Demo L'arbre de preuve de ($\vdash_{LJ} A_1 \vee A_2$) finit forcément par un $\vee d$ ou un $\vee g$ puisque si c'était un Affd utilisé, on aurait une preuve de ($\vdash_{LJ}$)

et comme aucune autre règle n'est applicable, on a ce qu'on veut $\square$

Coro : La logique intuitionniste est différente de la logique classique

$\boxed{\text{Démo}}$ Soit A une formule atomique quelconque, $A \vee \neg A$ est prouvable en logique classique, mais si $\neg A \vee A$ était prouvable en logique intuitionniste, alors A ou $\neg A$ serait prouvable, ie $(\vdash_{LJ} A)$ ou $(\vdash_{LJ} \neg A)$, ce qui est impossible, donc $A \vee \neg A$ n'est pas prouvable.