

Algorithme de Floyd-Warshall

Refs: Cormen

Prop: Étant donné un graphe $G=(S,A)$ et une fonction de poids $w: A \rightarrow \mathbb{R}$, on peut trouver toutes les plus courtes distances entre les paires de sommets si G n'a pas de cycle de poids négatif. Ou trouver un cycle de poids négatif en $O(|S|^3)$.

Démo • On va utiliser une approche de programmation dynamique en remarquant que les plus courts chemins satisfont une propriété de sous-structure optimale assez naturelle:
si $u \xrightarrow{p_1} v \xrightarrow{p_2} z$ est un plus court chemin de u à z , alors p_1 est un pcc de u à v et p_2 est un pcc de v à z .

• L'algorithme de Floyd-Warshall utilise cette propriété de la manière suivante: on suppose que $S = \{1, \dots, n\}$ et on note $S_k = \{1, \dots, k\}$ le graphe induit par les arêtes de sommets dans S_k . Un plus court chemin entre i et j dans S_k , soit passe par le sommet k , soit passe seulement par des sommets de S_{k-1} .

Plus précisément, soit p un pcc de i à j dans S_k :

* Si $k \in p$, on note $p_1 = i \xrightarrow{p_1} k$ et $p_2 = k \xrightarrow{p_2} j$ et on a que p_1 et p_2 sont des pcc (par prop de sr-structure opt) et de plus ils ne contiennent pas k , donc sont des pcc dans S_{k-1} .

* Si $k \notin p$, alors p est aussi le pcc dans S_{k-1} entre i et j .

• On définit $d_{ij}^{(k)}$ le poids d'un plus court chemin allant de i à j qui ne passe que par des sommets intermédiaires de S_k . On a:

* Pour $k=0$, $d_{ij}^{(0)} = w_{ij}$

* Pour $k>0$, on a la relation de récurrence suivante:

$$d_{ij}^{(k)} = \min(d_{ij}^{(k-1)}, d_{ik}^{(k-1)} + d_{kj}^{(k-1)})$$

Comme, pour tout chemin, les sommets intermédiaires sont dans $S \subseteq S_n$, la matrice $D^{(n)} = (d_{ij}^{(n)})$ donne la réponse finale $d_{ij}^{(n)} = \delta(i,j)$

- On construit donc l'algo suivant:

FLOYD-WARSHALL (W)

```

|  n = |W|
|  D(0) = W
|  Pour k = 1 à n FAIRE
|  |  D(k) ← matrice n×n (dij(k)) vide
|  |  Pour i = 1 à n FAIRE
|  |  |  Pour j = 1 à n FAIRE
|  |  |  |  dij(k) = min (dij(k-1), dik(k-1) + dkj(k-1))
|  |  |
|  |  RENVoyer D(n)

```

La correction est donnée par la relation de récurrence et la complexité est en $O(n^3)$

- Pour détecter un cycle négatif, il suffit de regarder si un sommet i a une entrée $D_{ii}^{(n)}$ négative