Algorithmes exponentiels pour INDEP

Réf : Wilf : Algorithms and complexity

Pré-requis : Le "master theorem" exponentiel

Th 1.4.1 : Soit (x_n) une suite qui satisfait une inégalité de récurrence de la forme

$$x_{n+1} \leq b_0 x_n + \dots + b_p x_{n-p} + G(n) \qquad (n \geq p)$$

où $b_i \geq 0$, $\sum b_i > 1$. Si de plus $G(n) = o(c^n)$, où c est la solution réelle de l'équation $c^{p+1} = b_0 c^p + \dots + b_p$, alors $\forall \varepsilon > 0$, on a $x_n = O((c+\varepsilon)^n)$

Algo 0 Tester tous les subsets pour trouver le max $\rightarrow$ complexité $O(2^n)$

Algo 0bis Idem mais récursif $\rightarrow O(2^n)$

- Améliorons cet algorithme avec la remarque suivante : étant donné un sommet v, si v est dans l'indep maximal, alors aucun de ses voisins n'y est, et si v n'y est pas, alors l'indep max est le même que celui de $G \setminus v$, ie :

$$\mathrm{indep}(G) = \max\{\mathrm{indep}(\underbrace{G - \{v\}}_{\text{taille} \searrow}),\ 1 + \mathrm{indep}(\underbrace{G - \{v\} - N(v)}_{\text{taille} \searrow})\}$$

Algo 1 Indep1(G) ;

```
Si G n'a pas d'arête RENVOYER |S|          (où G = (S, A))
SINON soit v un sommet non isolé de G
    n1 := Indep1(G - v) ;
    n2 := Indep1(G - v - N(v))
    RENVOYER max(n1, n2)
```

Complexité : car $T(n) \leq T(n-1) + T(n-2) + O(n^2)$

↳ racine est $\varphi_1 \simeq 1{,}61803\dots$ d'où $\boxed{T(n) = O(1{,}619^n)}$

- Améliorons cet algorithme en essayant de diminuer la taille de $G - \{v\} - N(v)$: peut-on s'arranger pour avoir $|N(v)| \geq 2$? Dans le cas où ce n'est pas possible, cela signifie que $|N(v)| \leq 1$ $\forall v \in S$, ie G est une collection d'arêtes disjointes et on peut résoudre Indep en temps linéaire en $|A|$ puisqu'il suffit de prendre tous les sommets isolés et un sommet de chaque arête

On obtient ainsi :

$\boxed{\text{Algo 2}}$ Indep 2(G) :

Si degmax(G) ≤ 1 ALORS calcul de l'indep

SINON soit v un sommet de degrée ≥ 2

⋮

Complexité : $T(n) \leq T(n-1) + T(n-3) + O(n^2)$

↳ racine $\varphi_2 \simeq 1,46557$ d'où $\boxed{T(n) = O(1,47^n)}$

- De même, peut on assurer que $|N(v)| \geq 3$? Si degmax(G) ≤ 2, alors G est une collection de cycles et de chemin, et on sait résoudre cela en temps linéaire, d'où l'algorithme

$\boxed{\text{Algo 3}}$ Indep3(G)

Si degmax ≤ 2 ALORS calcul de l'indep

SINON soit v un sommet de degré ≥ 3

⋮

Complexité : $T(n) \leq T(n-1) + T(n-4) + O(n^2)$

↳ racine $\varphi_3 \simeq 1,38$ d'où $\boxed{T(n) = O(1,39^n)}$

- Peut on continuer à faire de même ? Non, car Indep sur des graphes de degré max 3 est NP-complet (comme Indep d'ailleurs) donc il n'est pas plus simple à résoudre que Indep.