Convergence binomiale → Poisson.

Leçons : 261, 262, 264.

Réf : Durrett, section 2.6.

Déf : Soit E un ensemble dénombrable. Soient μ, ν deux mesures de proba. sur $(E, \mathcal{P}(E))$.
La distance de variation totale entre μ et ν est $\|\mu-\nu\| = \sum_{y\in E} |\mu(y)-\nu(y)|$. fam. sommable

à val. dans $\mathbb{R}_+$
0 ssi $\mu=\nu$
sym.
inég. tri.

Prop. $\|\mu-\nu\| = 2\sup_{A\subset E} |\mu(A)-\nu(A)|$.

(Dém : $\sum_{y\in E} |\mu(y)-\nu(y)| \geq |\mu(A)-\nu(A)| + |\mu(A^c)-\nu(A^c)| = 2|\mu(A)-\nu(A)|$; prendre $A = \{y\in E, \mu(y)\geq \nu(y)\}$)

Thm : Soient $(X_{n,m})_{n\in\mathbb{N}^*, m\in[\![1,n]\!]}$ des V.A. indépendantes à valeurs dans $\{0,1\}$, de lois $\mu_{n,m}$.
Notons $p_{n,m} = \mathbb{P}(X_{n,m}=1)$. Supposons $\sum_{m=1}^{n} p_{n,m} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda \in \mathbb{R}_+^*$ et $\max_{1\leq m\leq n} p_{n,m} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
Notons $S_n = \sum_{m=1}^{n} X_{n,m}$. (S_n) converge en loi vers la loi de Poisson de paramètre λ.
De plus, en notant μ_n la loi de S_n et ν_n la loi de Poisson de paramètre $\sum_{m=1}^{n} p_{n,m}$, on a :

$$\|\mu_n - \nu_n\| \leq 2\sum_{m=1}^{n} p_{n,m}^2.$$

Dém : On va utiliser trois lemmes.

Lemme 1 : Soient $\mu_1, \mu_2, \nu_1, \nu_2$ des mesures de proba. sur $\mathbb{N}$. Notons $\mu_1\times\mu_2$ et $\nu_1\times\nu_2$ leurs mesures produits. $\|\mu_1\times\mu_2 - \nu_1\times\nu_2\| \leq \|\mu_1-\nu_1\| + \|\mu_2-\nu_2\|$.
$(x,y)\mapsto \mu_1(x)\mu_2(y)$

Lemme 2 : $\|\mu_1 * \mu_2 - \nu_1 * \nu_2\| \leq \|\mu_1\times\mu_2 - \nu_1\times\nu_2\|$.

Lemme 3 : Si $\mu \sim \mathcal{B}(p)$ et $\nu \sim \mathcal{P}(p)$ alors $\|\mu-\nu\| \leq 2p^2$.

Dém. du lemme 1 : (à l'oral)

$$\begin{aligned}\|\mu_1\times\mu_2 - \nu_1\times\nu_2\| &= \sum_{(x,y)\in\mathbb{N}^2} |\mu_1(x)\mu_2(y) - \nu_1(x)\nu_2(y)| \\ &\leq \sum_{(x,y)\in\mathbb{N}^2} |\mu_1(x)\mu_2(y) - \nu_1(x)\mu_2(y)| + \sum_{(x,y)\in\mathbb{Z}^2} |\nu_1(x)\mu_2(y) - \nu_1(x)\nu_2(y)| \\ &\leq \sum_{y\in\mathbb{N}} \mu_2(y)\|\mu_1-\nu_1\| + \sum_{x\in\mathbb{N}} \nu_1(x)\|\mu_2-\nu_2\| \\ &\leq \|\mu_1-\nu_1\| + \|\mu_2-\nu_2\|.\end{aligned}$$

Dém. du lemme 2 :

$$\begin{aligned}\|\mu_1*\mu_2 - \nu_1*\nu_2\| &= \sum_{x\in\mathbb{N}} \Big|\sum_{y\in\mathbb{N}} \mu_1(x-y)\mu_2(y) - \sum_{y\in\mathbb{N}} \nu_1(x-y)\nu_2(y)\Big| \\ &\leq \sum_{(x,y)\in\mathbb{N}^2} |\mu_1(\underbrace{x-y}_{\tilde{y}})\mu_2(y) - \nu_1(x-y)\nu_2(y)| = \|\mu_1\times\mu_2 - \nu_1\times\nu_2\|\end{aligned}$$

($\tilde{y}$ (avec $\tilde{y}$ parcourt $\mathbb{N}^2$ quand (x,y) parcourt $\mathbb{N}^2$)

Dém. du lemme 3 :

$$\begin{aligned}\|\mu-\nu\| &= |\mu(0)-\nu(0)| + |\mu(1)-\nu(1)| + \sum_{n=2}^{+\infty} \nu(n) \\ &= \underbrace{|1-p-e^{-p}|}_{e^{-p}+p-1} + \underbrace{|p-pe^{-p}|}_{p-pe^{-p}} + 1-e^{-p}-pe^{-p}\end{aligned}$$

(tangente en 0, exp(−) convexe) $(p\geq 0$ et exp $\nearrow)$

$$= 2p(1-e^{-p}) \leq 2p^2 \text{ car } e^{-p} \geq 1-p \text{ (cf.)}.$$

Dém. du thm : Notons $\nu_{n,m}$ la loi de Poisson de paramètre $p_{n,m}$ et ν la loi de Poisson de par. λ.

$\mu_n = \mu_{n,1} * \dots * \mu_{n,n}$ (cf. déf. de S_n et les $X_{n,m}$ sont indép.)

$\nu_n = \nu_{n,1} * \dots * \nu_{n,n}$ (car si $Y_1 \sim \mathcal{P}(p_{n,1}), \dots, Y_n \sim \mathcal{P}(p_{n,n})$ sont indép. alors $Y_1 + \dots + Y_n \sim \mathcal{P}(\sum_{m=1}^{n} p_{n,m})$)

Avec les lemmes (et une récurrence) : $\|\mu_n - \nu_n\| \leq \sum_{m=1}^{n} \|\mu_{n,m} - \nu_{n,m}\| \leq 2 \underbrace{\sum_{m=1}^{n} p_{n,m}^2}_{\to 0}$

donc : $\sup_{A \subset \mathbb{N}} |\mu_n(A) - \nu_n(A)| \leq \sum_{m=1}^{n} p_{n,m}^2 \leq \max_{1 \leq m \leq n} p_{n,m} \sum_{m=1}^{n} p_{n,m}^2 \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

donc : $\forall k \in \mathbb{N} \quad |\mu_n(k) - \nu_n(k)| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

or : $\forall k \in \mathbb{N} \quad |\nu_n(k) - \nu(k)| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

donc : $\forall k \in \mathbb{N} \quad |\mu_n(k) - \nu(k)| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

donc (S_n) converge en loi vers la loi de Poisson de paramètre λ.

–

Dém. du fait que la distance en var. totale métrise la cv (en loi) stricte (sur E dén.) :

- Si $\|\mu_n - \mu\| \to 0$ alors : $\forall k \in E \quad |\mu_n(k) - \mu(k)| \to 0$.

- Si : $\forall k \in E \quad |\mu_n(k) - \mu(k)| \to 0$ alors :

  Soit $\varepsilon > 0$. $\sum_{k \in E} \mu(k) = 1$ donc : $\exists A$ partie finie de E $\underbrace{\mu(A)}_{= \sum_{k \in A} \mu(k)} \geq 1 - \varepsilon$.

  Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N$, $|\underbrace{\mu_n(A) - \mu(A)}_{= \underbrace{\sum_{k \in A} (\mu_n(k) - \mu(k))}_{\leq \frac{\varepsilon}{|A|} \text{ pour } n \text{ assez grand}}}| \leq \varepsilon$.

$$\begin{aligned}
\forall n \geq N \quad \|\mu_n - \mu\| &\leq \sum_{k \in A} |\mu_n(k) - \mu(k)| + \sum_{k \in A^c} \mu_n(k) + \sum_{k \in A^c} \mu(k) \\
&\leq \sum_{k \in A} |\mu_n(k) - \mu(k)| + 1 - \sum_{k \in A} \mu(k) + \sum_{k \in A} (\mu(k) - \mu_n(k)) + \sum_{k \in A^c} \mu(k) \\
&\leq 2 \sum_{k \in A} |\mu_n(k) - \mu(k)| + 2\mu(A^c) \\
&\leq 4\varepsilon.
\end{aligned}$$

Ainsi, $\|\mu_n - \mu\| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.