Théorème des moments.

Leçons : 260, 261.

Référence : Recueil de modèles aléatoires de Chafaï et Malrieu, thm 21.7 (p.287) mais attention, ils écrivent une connerie à un moment.

Théorème 1

Soit $\mu \in \mathcal{P}$ (l'ensemble des lois de probabilité sur $\mathbb{R}$ pour lesquelles les polynômes sont intégrables). Notons φ la fonction caractéristique de μ ($\varphi : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & \int_{\mathbb{R}} e^{itx} d\mu(x) \end{cases}$) et pour tout $n \in \mathbb{N}$ m_n le n-ième moment de μ ($m_n = \int_{\mathbb{R}} x^n d\mu(x)$). Les assertions suivantes sont équivalentes :
i) φ est analytique sur $\mathbb{R}$;
ii) φ est analytique sur un voisinage de 0 ;
iii) $\limsup(\frac{1}{n!}|m_n|)^{\frac{1}{n}} < +\infty$.
De plus, μ est alors caractérisée par ses moments (i.e. si $\nu \in \mathcal{P}$ vérifie $\forall n \in \mathbb{N}$ $\int_{\mathbb{R}} x^n d\nu(x) = \int_{\mathbb{R}} x^n d\mu(x)$ alors $\nu = \mu$).
En particulier toute loi à support compact est caractérisée par ses moments.

Application 2

La loi normale et la loi bêta sont caractérisées par leurs moments.

Preuve du théorème :

Remarquons tout d'abord que $\mu \in \mathcal{P}$ implique que $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \forall t \in \mathbb{R}\ \varphi^{(n)}(t) = \int_{\mathbb{R}} (it)^n e^{itx} d\mu(x). \tag{1}$$

En particulier, la série de Taylor de φ en 0 est $\displaystyle\sum_{n \geq 0} \frac{i^n m_n}{n!} t^n$.

Notons $r \in [0, +\infty]$ son rayon de convergence.

i) $\Rightarrow$ ii) est évident.

Montrons que ii) $\Rightarrow$ iii).

Supposons ii). On a alors $r > 0$. Or, d'après le lemme de Cauchy-Hadamard, $\frac{1}{r} = \limsup(\frac{1}{n!}|m_n|)^{\frac{1}{n}}$ (où par convention 0 et $+\infty$ sont inverses l'un de l'autre), donc $\limsup(\frac{1}{n!}|m_n|)^{\frac{1}{n}} < +\infty$.

Montrons que iii) $\Rightarrow$ i).

Supposons iii). De la même manière que précédemment, on a alors $r > 0$ (par le lemme de Cauchy-Hadamard). Grâce à l'inégalité de Taylor-Lagrange et à l'équation (1) on a :

$$\forall t, h \in \mathbb{R}\, \forall n \in \mathbb{N}\, |\varphi(t+h) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\varphi^{(k)}(t)}{k!} h^k| \leq \frac{|h|^n}{n!} \max_{[t,t+h]}(|\varphi^{(n)}|) \leq \frac{|h|^n}{n!} \int_{\mathbb{R}} |x|^n d\mu(x). \tag{2}$$

Soient $t \in \mathbb{R}$ et $h \in]-r, r[$. $(\frac{1}{n!}|m_n|)^{\frac{1}{n}}|h|$ est de $\limsup < 1$ donc il existe $0 \leq \eta_h < 1$ tel qu'à partir d'un certain rang $(\frac{1}{n!}|m_n|)^{\frac{1}{n}}|h| \leq \eta_h$.

Pour tout n pair $\frac{|h|^n}{n!} \int_{\mathbb{R}} |x|^n d\mu(x) = ((\frac{1}{n!}|m_n|)^{\frac{1}{n}}|h|)^n \leq \eta_h^n \to 0$.

Pour tout n impair $\frac{|h|^n}{n!} \int_{\mathbb{R}} |x|^{\frac{n-1+n+1}{2}} d\mu(x) \leq \frac{|h|^{\frac{n-1}{2}}\sqrt{(m_{n-1})}|h|^{\frac{n+1}{2}}\sqrt{(m_{n+1})}}{n!}$ par Cauchy-Schwarz, or ce dernier terme tend vers 0 quand n impair tend vers $+\infty$ car il est équivalent à $((\frac{1}{(n-1)!}|m_{n-1}|)^{\frac{1}{n-1}}|h|)^{\frac{n-1}{2}}((\frac{1}{(n+1)!}|m_{n+1}|)^{\frac{1}{n+1}}|h|)^{\frac{n+1}{2}}$ qui tend vers 0 d'après le cas précédent (l'équivalence vient du fait que $\sqrt{(n-1)!(n+1)!} = n!\sqrt{\frac{n+1}{n}} = n!\sqrt{1+\frac{1}{n}} \sim n!$).

Ainsi, sur $]t-r, t+r[$ la série de Taylor de φ en t tend vers φ.

Ainsi, φ est analytique sur $\mathbb{R}$.

μ est alors caractérisée par ses moments car si $\nu \in \mathcal{P}$ a les mêmes moments que μ alors ν vérifie aussi iii) donc, avec ce qui précède, sa fonction caractéristique est analytique sur $\mathbb{R}$ donc, par le principe du prolongement analytique, elle est déterminée par ses valeur et dérivées en 0, qui sont les $i^n m_n$, donc elle est égale à la fonction caractéristique de μ, donc $\nu = \mu$.

Si μ est à support compact alors : $\exists C > 0\ \mu(\mathbb{R} \setminus [-C, C]) = 0$.

$\forall n \in \mathbb{N}\ |m_n| \leq \int_{-C}^{C} |x|^n d\mu(x) \leq C^n \int_{-C}^{C} 1 d\mu(x) \leq C^n$ (car μ probabilité)

$$
\begin{aligned}
0 \leq (\frac{|m_n|}{n!})^{\frac{1}{n}} &\leq Ce^{-\frac{1}{n}\ln(n!)} \\
&\leq Ce^{-\frac{1}{n}(\sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}\ln(k)+\sum_{k=\lfloor \frac{n}{2} \rfloor+1}^{n}\ln(k))} \\
&\leq Ce^{-\frac{1}{n}(\frac{n}{2}\ln(\frac{n}{2}))} \\
&\leq \frac{\sqrt{2}C}{\sqrt{n}} \to 0
\end{aligned}
$$

donc $(\frac{|m_n|}{n!})^{\frac{1}{n}} \to 0$ donc sa $\limsup$ est finie.