

\mathfrak{S}_4 est un groupe de pavage (ou presque)

Contexte : Une des représentations de degré 3 de \mathfrak{S}_4 s'interprète à l'aide d'isométries du tétraèdre. Et pour celle de degré 2 ? On sait qu'il n'existe qu'une seule représentation de degré 2 et on va montrer qu'on peut la voir comme l'action des isométries d'un pavage hexagonal sur les 4 sous-réseaux du réseau des translations de ce pavage, ou presque... On peut néanmoins comprendre le développement suivant sans connaître la notion de groupe de pavage.

Pour l'agreg : le développement semble long, mais il n'y a pas tout ça à écrire et la plupart des calculs peuvent être passés sous silence en utilisant de beaux dessins. Pour en savoir plus sur les pavages aller faire un tour dans l'Algèbre de Tauvel.

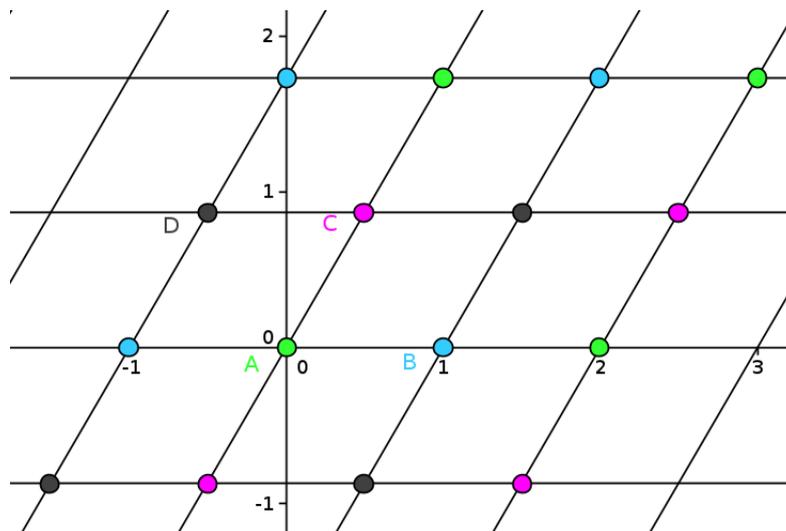
Théorème 1. *On se place dans le plan euclidien :*

$$\mathfrak{S}_4 \simeq \langle t_1, t_{j^2}, r_{O, 2\pi/3}, s_{Ox} \rangle / \langle t_2, t_{2j^2} \rangle$$

Note : on n'a pas besoin de mettre t_{j^2} dans la description du groupe car il est engendré grâce à t_1 et la rotation, mais le lien avec les réseaux semble plus clair ainsi.

Démonstration. On définit les réseaux affines suivants :

$$\begin{cases} A = 2\mathbb{Z} + 2j^2\mathbb{Z} \\ B = 1 + A \\ C = j^2 + A \\ D = 1 + j^2 + A \end{cases}$$



On note $S = \{A, B, C, D\}$ et $G = \langle t_1, t_{j^2}, r, s \rangle$ où s est la réflexion orthogonale par rapport à l'axe des abscisses et r est la rotation de centre O et d'angle $2\pi/3$. Le groupe G stabilise S , c'est-à-dire que $g(s) \in S$ pour tout $s \in S$. Ici, "stabiliser" s'entend au sens global et non point par point.

Pour démontrer ceci, on le montre pour chaque générateur. Les calculs suivants peuvent se voir très clairement sur le dessin précédent, mais on présente quand même les calculs :

$$\begin{cases} t_1(A) = 1 + A = B \\ t_1(B) = 2 + A = A \\ t_1(C) = 1 + j^2 + A = D \\ t_1(D) = 2 + j^2 + A = j^2 + A = C \end{cases}$$

Ainsi t_1 va jouer plus tard le rôle de la double transposition $(AB)(CD)$.

De même pour la rotation r , on utilise la relation $1 + j + j^2 = 0$:

$$\begin{cases} r(A) = jA = 2j\mathbb{Z} + 2j^3\mathbb{Z} = (-2 - 2j^2)\mathbb{Z} + 2\mathbb{Z} = 2\mathbb{Z} + 2j^2\mathbb{Z} = A \\ r(B) = jB = j + jA = j + A = -1 - j^2 + A = D \\ r(C) = jC = j^3 + A = B \\ r(D) = jD = j + j^3 + A = -j^2 + A = C \end{cases}$$

Donc r va jouer plus tard le rôle du cycle (BDC) .

$$\begin{cases} s(A) = 2\mathbb{Z} + 2\bar{j}^2\mathbb{Z} = 2\mathbb{Z} + 2j\mathbb{Z} = 2\mathbb{Z} + 2(1+j)\mathbb{Z} = 2\mathbb{Z} - 2j^2\mathbb{Z} = 2\mathbb{Z} + 2j^2\mathbb{Z} = A \\ s(B) = 1 + \bar{A} = 1 + A = B \\ s(C) = \bar{j}^2 + A = j + A = -j + A = 1 + j^2 + A = D \\ s(D) = 1 + \bar{j}^2 + A = 1 + j + A = -j^2 + A = j^2 + A = C \end{cases}$$

Donc s va jouer plus tard le rôle de la transposition (CD) .

Ainsi G agit sur S par la relation suivante où $g \in G$ et $E \in S$:

$$\rho(g)(E) = g(E)$$

Calculons le noyau de l'action. On a clairement $\langle t_2, t_{2j^2} \rangle \subset \text{Ker}(\rho)$. Montrons qu'on a égalité.

Soit $g \in \text{Ker}(\rho)$. Alors $g(0) \in A$. Donc à translation par t_2 et t_{2j^2} près, on peut supposer que g fixe 0. Si $g \in G^+$ (si g est une isométrie positive), alors g est une rotation de centre 0. Or $g(1) \in B$ et g conserve les distances donc $|g(1)| = 1$. On pose $g(1) = 1 + 2a + 2j^2b$, alors $b = 0$. Si ce n'était pas le cas alors $1 = |1 + 2a + 2j^2b| \geq 2 \sin(2\pi/3)|b| \geq \sqrt{3}|b|$. Il reste $|1 + 2a| = 1$ ce qui donne $a = 0$ ou $a = -1$. D'où $g(1) = 1$ ou $g(1) = -1$. Si $g(1) = -1$, alors g serait la rotation d'angle π . Montrons que cette rotation n'est pas dans G . Pour cela on montre que $L_{G^+} = \{\bar{g}, g \in G^+\} = \langle \bar{r} \rangle$. Soit $g \in G^+$. g s'écrit comme un produit de translations, puissance de r et de symétries s . Or la partie linéaire d'une translation est triviale donc \bar{g} est un produit de $\overrightarrow{srs^{-1}}$. Or srs^{-1} est une rotation qui fixe 0. De plus en regardant l'image de 1 on en déduit que c'est r^{-1} . D'où $\bar{g} \in \langle \bar{r} \rangle$. Donc $|L_G^+| = 3$ et ne peut contenir la rotation d'angle π qui est d'ordre 2. Donc $g(1) = 1$ et $g = Id$.

Si maintenant $g \in G^-$, alors $sg \in G^+$ et fixe B (attention sg n'est pas dans $\text{Ker}(\rho)$ mais s fixe B et g est dans le noyau). Donc $sg(1) = 1$ ou -1 . De même -1 est exclu sinon il y aurait la rotation d'angle π dans G . Donc $sg = Id$ et donc $s \in \text{Ker}(\rho)$: c'est impossible.

Donc $g = Id$. On en conclut que $\text{Ker}(\rho) = \langle t_2, t_{2j^2} \rangle$.

Concluons. En quotientant par le noyau on obtient une action fidèle donc $G/\text{Ker}(\rho)$ s'injecte dans \mathfrak{S}_4 . Montrons qu'il y a tout. Les permutations $(AC)(BD)$, (CD) et (BDC) sont réalisées par t_{j^2} , s et r . Donc les permutations suivantes sont dans le groupe : $(AC)(BD)(CD) = (ACBD)$ et $(BDC)(CD)(BCD) = (BC)$. Or \mathfrak{S}_n est engendré par une transposition et un n -cycle. Donc on a l'égalité voulue. □

Corollaire 2. *On confond les deux groupes précédents. On note alors \bar{g} la classe de $g \in G$ dans le quotient par $\langle t_2, t_{2j^2} \rangle$. On note e une base de \mathbb{R}^2 . La représentation de \mathfrak{S}_4 suivante est bien définie et est irréductible :*

$$\rho(\bar{g}) = \text{Mat}_e(\bar{g})$$

Démonstration. La représentation est bien définie car la partie linéaire d'une translation est l'identité. De plus, cela donne bien une représentation car on a un morphisme. Pour calculer son caractère on calcule la trace de $()$, (AB) , (ABC) , $(ABCD)$ et $(AB)(CD)$. Or (CD) correspond à une réflexion, (ABC) à une rotation d'angle $2\pi/3$, $(ABCD)$ à une symétrie glissée et $(AB)(CD)$ à une translation. On en déduit le caractère suivant :

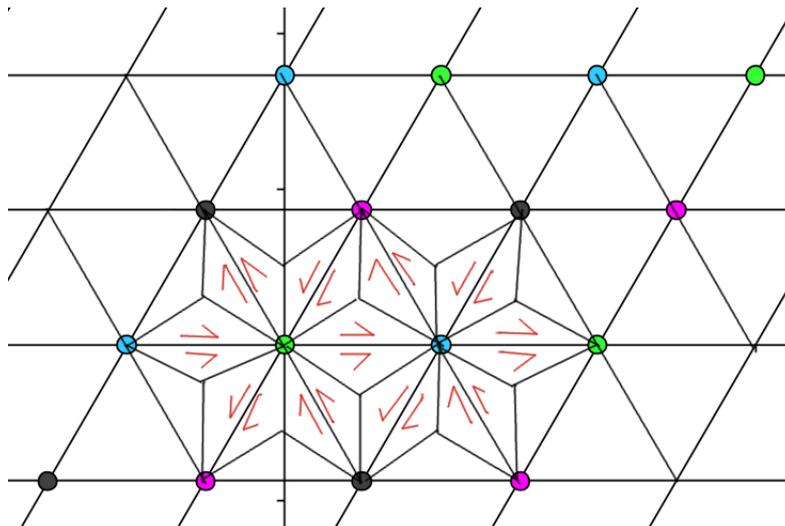
$$\frac{() \mid (CD) \mid (BDC) \mid (ACBD) \mid (AB)(CD)}{2 \mid 0 \mid -1 \mid 0 \mid 2}$$

Finalement, il s'agit d'une représentation irréductible car

$$2^2 + 6 \times 0^2 + 8 \times (-1)^2 + 6 \times 0^2 + 3 \times 2^2 = 4 + 8 + 12 = 24$$

□

Remarque : Le pavage utilisé est le suivant :



On a tracé une flèche sur un morceau (triangulaire) du plan qui va paver tout le plan par actions du groupe de pavage. Le tracé permet de “suivre” le processus de pavage.

Son groupe d’isométries est :

$$\langle t_1, t_{j^2}, r_{O, 2\pi/3}, s_{Ox} \rangle$$

Remarque : Et pourquoi la preuve ne marcherait pas avec un pavage hexagonal tout simple ? Il a le même réseau pourtant ! ? Eh bien dans ce cas, le groupe d’isométries est :

$$\langle t_1, t_{j^2}, r_{O, 2\pi/6} \rangle$$

La rotation d’angle π serait dans $\text{Ker}(\rho)$ et on aurait :

$$\text{Ker}(\rho) = \langle t_2, t_{2j^2}, r_\pi \rangle$$

Mais là, prendre la partie linéaire ne passe pas au quotient et on ne peut en déduire une représentation.

Leçons concernées :

- 101 - Groupe opérant sur un ensemble. Exemples et applications.
- 102 - Groupe des nombres complexes de module 1. Sous-groupes des racines de l’unité. Applications.
- 103 - Exemples de sous-groupes distingués et de groupes quotients.
- 104 - Groupes finis. Exemples et applications.
- 105 - Groupe de permutation d’un ensemble fini. Applications.
- 106 - Groupe linéaire d’un espace vectoriel de dimension finie E , sous-groupe de $GL(E)$. Applications.
- 107 - Représentations et caractères d’un groupe fini sur un \mathbb{C} -espace-vectoriel.
- 108 - Exemples de parties génératrices. Applications.
- 109 - Exemples de représentations de groupes finis de petit cardinal.

- 160 - Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel euclidien (de dimension finie).
- 161 - Isométries d'un espace affine euclidien de dimension finie. Exemples et applications.
- 182 - Applications des nombres complexes à la géométrie. Homographies.
- 183 - Utilisation des groupes en géométrie.