Dobble et géométrie projective

Théorème 1. *Soit un ensemble $\mathcal{S}$ de taille $s \geq 3$ dont on appelle* ***symboles*** *les élements. Soit un ensemble $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(\mathcal{S})$ de taille $c \geq 2$ dont on appelle* ***cartes*** *les élements. On fait les hypothèses suivantes :*

1. *Pour toute paire de cartes il existe exactement un symbole en commun : $\forall A, B \in \mathcal{C}^2, A \neq B, |A \bigcap B| = 1$.*
2. *Pour toute paire de symbole il existe exactement une carte qui possède ces deux symboles : $\forall u, v \in \mathcal{S}^2, u \neq v, \exists! A \in \mathcal{C} : \{u, v\} \subset A$.*
3. *Il y a au moins trois symboles sur chaque carte : $\forall A \in \mathcal{C}, |A| \geq 3$.*

Alors il existe un entier m tel que chaque symbole est utilisé m fois, chaque carte contient m symboles et

$$c = s = m^2 - m + 1$$

On notera en minuscule les symboles et en majuscule les cartes.

Démonstration. Supposons tout d'abord qu'il existe un entier $m \geq 3$ tel que $|A| = m$ pour toute carte A.

Montrons que $s = 1 + k(m-1)$. Soit u un symbole. On note k_u le nombre de cartes qui utilisent ce symbole. On note $C_1, \ldots C_{k_u}$ ces cartes. Montrons que :

$$\mathcal{S} = \{u\} \bigsqcup_{i=1}^{k_u} (C_i - u)$$

Pour tout $i \neq j$, C_i et C_j s'intersectent exactement en u donc l'union précédente est disjointe. Soit $v \in \mathcal{S}$ différent de u. Il existe une carte qui contient v et u donc elle est parmi les C_i. Donc v appartient à l'union et on a démontré l'égalité. On en déduit que $s = 1 + k_u(m-1)$. Donc k_u est indépendant de u. Donc tout symbole appartient à exactement k cartes où k vérifie :

$$s = 1 + k(m-1)$$

Montrons que $cm = ks$. Pour cela on fait la double sommation suivante. Dans un premier temps :

$$\sum_{A \in \mathcal{C}} |A| = \sum_{A \in \mathcal{C}} m = cm$$

Mais en même temps la quantité précédente est égale à :

$$\sum_{A \in \mathcal{C}} \sum_{u \in A} 1 = \sum_{u \in \mathcal{S}} \sum_{A \in \mathcal{C} : u \in A} 1 = \sum_{u \in \mathcal{S}} k = ks$$

On en déduit :

$$cm = ks$$

Montrons que $c = (k-1)m + 1$. Soit A une carte. La carte A contient m symboles notés $u_1, \dots, u_m$. Pour chacun de ces symboles on note $\mathcal{C}_{u_i}$ l'ensemble des cartes qui contiennent u_i *ie* $\{B \in \mathcal{C} : u_i \in B\}$. D'où

$$\mathcal{C} = \{A\} \bigsqcup_{i=1}^{m} (\mathcal{C}_{u_i} - A)$$

En effet, pour tout $i \neq j$, si B est une carte qui contient u_i et u_j en même temps c'est impossible car A et B s'intersecteraient en 2 symboles. Donc l'union est disjointe. De plus soit B une carte différente de A. Alors il existe un symbole en commun avec A. Donc il existe i tel que $u_i \in B$ et $B \in \mathcal{C}_{u_i}$. On en déduit que

$$c = 1 + (k-1)m$$

Mixons toutes ces égalités ensemble pour en déduire que $k = m$. Des expressions de s et c en fonction de k et m on en déduit à l'aide de $cm = ks$ que :

$$(1 + (k-1)m)m = k(1 + k(m-1))$$

Donc $k^2(m-1) + k(1-m^2) + m(m-1) = 0$. On en déduit que k vérifie l'équation du second degré suivant :

$$k^2 - k(m+1) + m = 0$$

Or $k = 1$ et $k = m$ sont les seules solutions. Or $k > 1$ car il y a au moins deux cartes. Donc $k = m$.

Passons maintenant à la démonstration de ce qui a été admis. Montrons qu'il existe $m \geq 3$ tel que $|A| = m$ pour toute carte A.

Soit A la carte de taille de maximale. Soit B une autre carte. Ces deux cartes s'intersectent en un symbole qu'on note u. Or $|A|$ et $|B| \geq 3$. Donc il existe $v \neq u$ dans A et w différent de u et v dans B. Par hypothèse, il existe une carte C qui contient v et w. Il existe donc $z \in C$ différent de u, v et w. Pour tout symbole x de A différent de u on note $C_{x,w}$ la carte qui passe par x et w. Cette carte est différente de A et B. Or $|B \bigcap C_{x,w}| = 1$. Donc il existe $y \in B$ différent de u. De plus tous les y obtenus sont différents par définition de la carte $C_{x,w}$. D'où $|B| \geq |A$. Donc $|A| = |B|$. On en déduit que toutes les cartes ont la même taille.

□

Les égalités obtenues sont donc des conditions nécessaires pour l'obtention d'un jeu de dobble (un peu plus élaboré que la définition donnée par le vrai jeu quand même car il contient en plus la condition 2). Qu'en est il de l'existence ? Et bien on est capable dans construire pour $m-1$ une puissance d'un nombre premier.

Théorème 2. *Soit q une puissance d'un nombre premier. On considère l'ensemble des symboles formé par $P_2(\mathbb{F}_q)$. On considère l'ensemble des cartes formé par les droites de $P_2(\mathbb{F}_q)$. Alors on a un bien un dobble au sens du théorème précédent.*

Démonstration. Soit deux droites de P_2 c'est-à-dire $L_1 = \Pi(F_1)$ et $L_2 = \Pi(F_2)$ où F_1 et F_2 sont deux sous-espaces vectoriels distincts de $\mathbb{F}_q^3$ de dimension 2. Or $L_1 \bigcap L_2 = \Pi(F_1 \bigcap F_2)$. La dimension de $F_1 \bigcap F_2$ est donc de 1 (par la formule de Grassman). C'est donc une droite vectorielle. Donc l'intersection de L_1 et L_2 est restreinte au point de P_2 correspondant.

Soit deux points de P_2 distincts. On note F le plan vectoriel formé par les deux droites vectorielles correspondantes. Alors $\Pi(F)$ est une droite qui passe par ces deux points. Réciproquement, si une droite passe par ces deux points alors le plan vectoriel associé est le plan F précédent. D'où l'unicité.

Une droite de P_2 est une droite projective donc de cardinal $q + 1 \geq 3$.

On a donc bien un dobble.

□

Question ouverte : Et pour $m = 7$?

Un dessin pour $q = 2$ On a alors $m = k = 3$ et $c = s = q^2 + q + 1 = 7$.

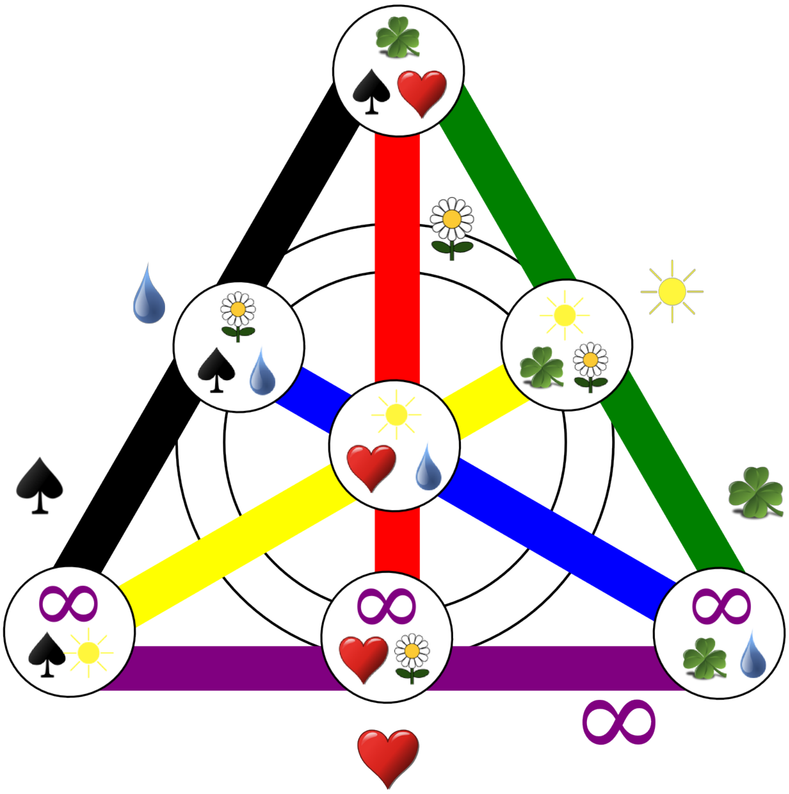

Figure 1 – Le plan de Fano et le dobble