

Suite de polygones

Mohamed NASSIRI

Références :

∅

Recasage :

- 152 : Déterminant. Exemples et applications.
- 181 : Barycentres dans un espace affine réel de dimension finie, convexité. Applications.
- 182 : Applications des nombres complexes à la géométrie.
- 226 : Suites vectorielles et réelles définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. Exemples. Applications à la résolution approchée d'équations.
- 102 : Groupe des nombres complexes de module 1. Sous-groupes des racines de l'unité. Applications.
- 155 : Endomorphismes diagonalisables en dimension finie.

Résumé :

Un développement très intéressant qui n'est pas référencé. Ne fuyez pas en croyant qu'il y aura de la géométrie. On n'utilise seulement la formule du barycentre dans le cas complexe et c'est tout ! Le reste c'est de l'algèbre linéaire.

Prérequis :

Nombres complexes en géométrie - Barycentres - Déterminant (circulant) - Diagonalisation

Théorème : Soit $Z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ une suite d'affixes du plan complexe.
En notant, $Z_k = (z_{k,1}, \dots, z_{k,n})$, on définit par récurrence

$$Z_0 = Z \text{ et } Z_{k+1} = \left(\frac{z_{k,1} + z_{k,2}}{2}, \frac{z_{k,2} + z_{k,3}}{2}, \dots, \frac{z_{k,n-1} + z_{k,n}}{2}, \frac{z_{k,n} + z_{k,1}}{2} \right)$$

Alors la suite $(Z_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers l'isobarycentre des affixes z_1, \dots, z_n .

Démonstration.

Etape 1 - Réécriture matricielle :

Comme promis, on va traduire tout ça sous forme matricielle. On a donc

$$Z_{k+1} = \left(\frac{z_{k,1} + z_{k,2}}{2}, \frac{z_{k,2} + z_{k,3}}{2}, \dots, \frac{z_{k,n-1} + z_{k,n}}{2}, \frac{z_{k,n} + z_{k,1}}{2} \right) \Leftrightarrow Z_{k+1} = AZ_k$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \text{ et par récurrence immédiate, on a } Z_k = A^k Z_0.$$

Etape 2 - Convergence de la suite $(A^k)_{k \in \mathbb{N}}$:

Il suffit donc de montrer que $(A^k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ muni d'une norme d'algèbre $\| \cdot \|$ quelconque. Pour cela, étudions les valeurs propres de A .

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda Id) = \begin{vmatrix} a_0 & \dots & a_{n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & \dots & a_0 \end{vmatrix}$$

avec $a_0 = \frac{1}{2} - \lambda$, $a_1 = \frac{1}{2}$ et $a_i = 0$, $\forall i > 1$.

Le lecteur averti aura remarqué qu'il s'agit d'un déterminant circulant et en posant

$$P(X) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k \text{ et } \omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$$

on a :

$$\chi_A(\lambda) = \prod_{j=1}^n P(\omega^j) = \prod_{j=1}^n \left(\frac{1}{2} - \lambda + \frac{1}{2} \omega^j \right) = \prod_{j=1}^n (\lambda - y_j) \quad \text{où } y_j = \frac{\omega^j + 1}{2}$$

Comme $y_i = y_j \Leftrightarrow i = j$, χ_A est scindé à racines simples, donc A est diagonalisable et ainsi

$$\exists P \in GL_n(\mathbb{C}) \text{ telle que } A = P^{-1}DP \text{ avec } D = \text{diag}(y_1, \dots, y_n)$$

. Or pour $j \neq n$, on a $|y_j| = \left| \frac{\omega^j + 1}{2} \right| = \left| \cos \frac{\pi j}{n} \right| < 1$ donc

$$A^k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} P^{-1} \text{diag}(0, \dots, 0, 1) P$$

Etape 3 - Convergence de la suite $(Z_k)_{k \in \mathbb{N}}$:

Soit $\lim_{k \rightarrow +\infty} B = A^k$ et $X = BZ_0$, on a donc $Z_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} X$ et par continuité de A et par passage à la limite, on a $X = AX$. Or l'espace correspondant à la valeur propre 1 contient le vecteur $(1, \dots, 1)$ et cet espace est de dimension 1, donc ce vecteur génère complètement l'espace et ainsi $X = (a, \dots, a)$.

Enfin si g est l'isobarycentre de Z_0 , il est aussi celui de Z_k car on a :

$$g_{k+1} := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z_{k+1,i} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{z_{k,i} + z_{k,i+1}}{2} \right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z_{k,i} := g_k$$

Par passage à la limite et par continuité, g est encore l'isobarycentre de X , d'où $a = g$. □

Remarques :

- On a utilisé le calcul d'un déterminant dit *circulant*.

Déterminant circulant : Soit $(a_i)_{i=1\dots n} \in \mathbb{C}^n$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_n & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_2 & a_3 & \dots & a_1 \end{vmatrix} = \prod_{k=0}^{n-1} P(\omega^k)$$

où $P = \sum_{k=1}^n a_k X^{k-1}$ et ω une racine primitive n-ième de l'unité.

Démonstration : Considérons la matrice

$$J = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

On a donc $A = \sum_{i=1}^n a_i J^{i-1}$. Par conséquent, pour tout $Q \in \mathbb{C}[X] \setminus \{0\}$ et $\deg Q < n$, on a $Q(J) \neq 0$. Donc le polynôme minimal de J vérifie $\deg \Pi_J \geq n$, or $J^n - I = 0$, donc $\Pi_J = X^n - 1$. Et comme $\Pi_J | \chi_J$ avec $\deg \chi_J = n$, on a donc

$$\chi_J(X) = (-1)^n X^n - 1 = (-1)^n \prod_{k=0}^{n-1} (X - \omega^k) \quad \text{avec } \omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$$

J est donc diagonalisable, et il existe ainsi $Q \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que :

$$QJQ^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \omega & & \\ & & \ddots & \\ & & & \omega^{n-1} \end{pmatrix}$$

On en déduit donc que

$$QAQ^{-1} = QP(J)Q^{-1} = P(QJQ^{-1}) = \begin{pmatrix} P(1) & & & \\ & P(\omega) & & \\ & & \ddots & \\ & & & P(\omega^{n-1}) \end{pmatrix}$$

Donc $\det A = P(1)P(\omega)\dots P(\omega^{n-1}) = \prod_{k=0}^{n-1} P(\omega^k)$.

□

- A la fin, nous avons écrit : *Par passage à la limite et par continuité, g est encore l'isobarycentre de X .* Nous avons montré que g est l'isobarycentre de Z_k pour tout $k \in \mathbb{N}$ (i.e.)

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z_{k,i} = g$$

Alors l'application,

$$\forall k \in \mathbb{N}, z_{k,i} \mapsto \sum_{i=1}^n (z_{k,i} - g) = 0$$

est continue en $z_{k,i}$ et on peut donc passer à la limite pour $k \rightarrow +\infty$

- **L'interprétation géométrique**

Ce théorème a une interprétation géométrique très intéressante ! En partant d'un polygone à n côtés, le polygone des milieux "converge" vers l'isobarycentre du polygone de départ. Attention cependant à l'emploi du mot "convergence" ... Même si, intuitivement, on comprend ce que ça veut dire, ce n'est pas mathématiquement correcte s'il n'y a pas de définition d'une topologie sur l'ensemble des polygones qui permettrait à une suite de polygones de tendre vers un point.

Le plus intrigant est que cette affirmation reste encore vraie si le polygone est non convexe (on dit aussi *polygone concave*). En effet, dans la démonstration, la suite de points est quelconque !

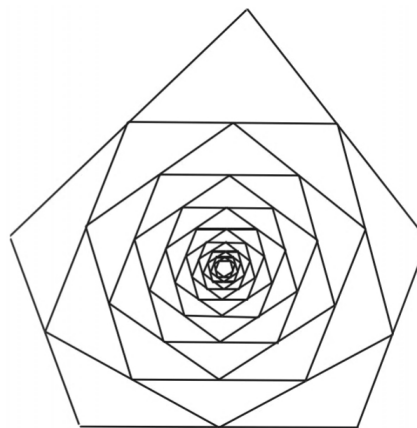


Illustration de la "convergence" des polygones

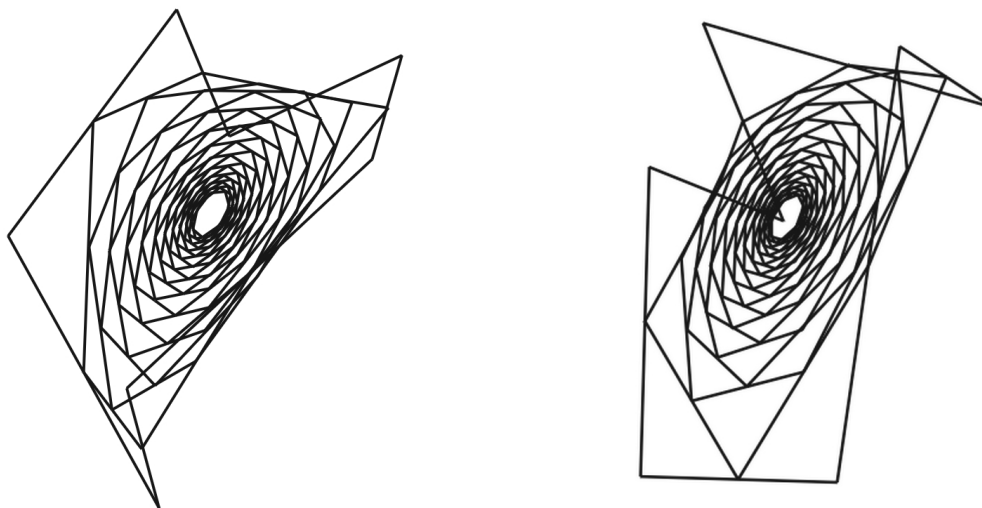
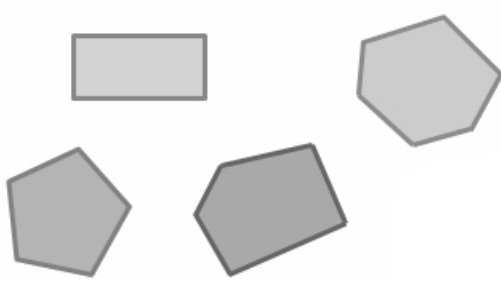
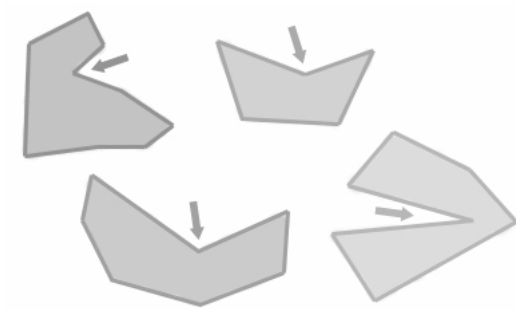


Illustration de la "convergence" des polygones non convexes

On rappelle qu'un polygone est convexe lorsque tout segment reliant deux points quelconques de ce polygone y est entièrement contenu. Un polygone non convexe possède au moins un angle rentrant. Les polygones convexes ont donc tous leurs angles saillants ou plats.



Polygones convexes



Polygones non convexes

Une dernière remarque concernant le cas des polygones non convexe. Martine Brunstein, Danielle Buteau, Marie-Christine Chanudeau, Pierre Lévy et Jacqueline Zizi font une conjecture intéressante en 1993 :

Si le polygone de départ est non convexe, on s'aperçoit qu'en répétant l'opération des milieux plusieurs fois, le polygone obtenu finit par devenir convexe. Cela est encore vrai si le polygone de départ est croisé. On finit là encore par obtenir un polygone convexe. En fait, quelque soit le polygone initial, plus on répète l'opération des milieux, plus le polygone obtenu tend à devenir régulier.