

# Homéomorphisme entre $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$

Mohamed NASSIRI

## Références:

Histoires hédonistes de groupes et de géométries - Tome 1, Philippe Caldero et Jérôme Germoni - p.208-209

## Recasage :

- 155 : Endomorphismes diagonalisables en dimension finie.
- 156 : Exponentielle de matrices. Applications.
- 158 : Matrices symétriques réelles, matrices hermitiennes.
- 160 : Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel euclidien (de dimension finie).
- 150 : Exemples d'actions de groupes sur les espaces de matrices.
- 203 : Utilisation de la notion de compacité.

## Résumé:

C'est un développement classique de l'agrégation ! L'exponentielle de matrices, définie à l'aide d'une série convergente, est une généralisation de la fonction exponentielle aux matrices.

On montre ici que lorsque l'on restreint l'exponentielle de matrices à  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  (resp.  $\mathcal{H}_n$ ), on obtient un homéomorphisme entre  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  et  $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$  (resp.  $\mathcal{H}_n$  et  $\mathcal{H}_n^{++}$ ).

## Prérequis:

Exponentielle de matrices - Groupe orthogonal - Matrices symétriques réelles, matrices symétriques réelles définies positives

### Théorème :

- L'application  $\exp : \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$  est un homéomorphisme.
- L'application  $\exp : \mathcal{H}_n \rightarrow \mathcal{H}_n^{++}$  est un homéomorphisme.

*Démonstration.*

Pour la démonstration, on se limite au cas réel. Pour montrer l'homéomorphisme, on procède classiquement : on montre que l'application est bien définie, continue, bijective et que sa réciproque est continue.

Etape 1 - Définition et continuité:

Soit  $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ , comme  $\exp S = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} S^k$ ,  $S$  détermine de façon unique  $\exp S$ .

Comme  $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ , il existe  $P \in O_n(\mathbb{R})$  telle que  $S = P \text{diag}(\lambda_i) P^{-1} = P \text{diag}(\lambda_i)^t P$  avec  $\lambda_i \in \mathbb{R}$ . On a donc :

$$\exp S = \exp(P \text{diag}(\lambda_i)^t P) = P \text{diag}(\exp(\lambda_i))^t P \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$$

car  $\exp(\lambda_i) > 0$  pour tout  $i$  (et la symétrie est évidente), donc  $\exp$  envoie bien  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  sur  $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ .

De plus,  $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est continue comme somme d'une série normalement convergente sur tout

compact. Par restriction à  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ , elle reste encore continue.

Etape 2 - Surjectivité :

Soit  $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ . Il existe donc  $P \in O_n(\mathbb{R})$  telle que  $B = P \text{diag}(\mu_i) P^{-1} = P \text{diag}(\mu_i)^t P$  avec  $\mu_i \in \mathbb{R}^{+*}$ .  
Posons  $A = P \text{diag}(\ln(\mu_i))^t P$ .  $A$  est clairement symétrique et on a

$$\exp A = \exp(P \text{diag}(\ln(\mu_i))^t P) = P \text{diag}(\exp(\ln(\mu_i)))^t P = P \text{diag}(\mu_i)^t P = B,$$

d'où la surjectivité.

Etape 3 - Injectivité :

Supposons que  $\exp A = \exp A'$ , avec  $A, A' \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ .

Soit  $Q$  le polynôme d'interpolation de Lagrange tel que pour tout  $i$ ,  $Q(e^{\lambda_i}) = \lambda_i$ . Alors  $A'$  commute avec  $Q(\exp A') = Q(\exp A) = A$ , et  $A$  et  $A'$  sont donc diagonalisables dans une même base. Il existe ainsi une matrice de passage  $P_0$  telle que

$$A' = P_0 \text{diag}(\mu'_1, \dots, \mu'_n) P_0^{-1} \text{ et } A = P_0 \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n) P_0^{-1}$$

Par suite :

$$\begin{aligned} \exp A' = \exp A &\Rightarrow P_0 \text{diag}(\exp(\lambda'_1), \dots, \exp(\lambda'_n)) P_0^{-1} = P_0 \text{diag}(\exp(\lambda_1), \dots, \exp(\lambda_n)) P_0^{-1} \\ &\Rightarrow \forall 1 \leq i \leq n, \exp(\lambda'_i) = \exp(\lambda_i) \\ &\Rightarrow \forall 1 \leq i \leq n, \lambda'_i = \lambda_i \quad (\mu'_i, \mu_i \in \mathbb{R} \text{ car } \exp \text{ est injective dans } \mathbb{R}) \\ &\Rightarrow A = A' \end{aligned}$$

donc  $\exp$  est injective.

Etape 4 - Continuité de  $\exp^{-1}$  :

Soit  $(B_p)_{p \in \mathbb{N}} = (\exp A_p)_{p \in \mathbb{N}}$  une suite de  $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$  qui converge vers  $B = \exp A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ . Montrons que  $(A_p)$  converge vers  $A$ .

Comme elle converge, la suite  $(B_p)$  est bornée pour la norme  $\|\cdot\|_2$ . De même, par continuité du passage à l'inverse, la suite  $(B_p^{-1})$  converge vers  $(B^{-1})$ , donc elle est aussi bornée pour  $\|\cdot\|_2$ .

Or,  $M \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ ,  $\|M\|_2 = \rho(M)$ , où  $\rho$  est le rayon spectral.

Comme  $\text{sp}(B_p^{-1}) = \{\mu \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{\mu} \in \text{sp}(B_p)\}$ , on en déduit que les valeurs propres des  $B_p$  sont contenues dans le compact  $K = [C', C] \subset [0, +\infty]$  (où  $C$  et  $C'$  sont des constantes). Par suite, les valeurs propres des  $A_p$  sont contenues dans le compact  $K = [\ln C', \ln C]$  de  $\mathbb{R}$ , et donc la suite  $(A_p)$  est bornée pour la norme  $\|\cdot\|_2$ .

Par le théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe  $\bar{A}$  valeur d'adhérence de  $(A_p)_{p \in \mathbb{N}}$  (i.e.) il existe une sous-suite  $(A_{p_k})_{k \in \mathbb{N}}$  de  $(A_p)$  converge vers  $\bar{A}$ .

Or, comme on a  $B_{p_k} = \exp A_{p_k}$ , on en déduit que  $\exp A = \exp \bar{A}$  (car  $B_{p_k} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} B = \exp A$ ). Par injectivité

de l'exponentielle sur  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ , il vient  $\bar{A} = A$ .

Une suite ne possédant qu'une valeur d'adhérence dans un compact converge vers cette valeur d'adhérence. Donc  $(A_p)$  converge vers  $A$ .

□

### Remarques :

- Dans la démonstration, on introduit  $Q$  le polynôme d'interpolation de Lagrange tel que pour tout  $i$ ,  $Q(e^{\lambda_i}) = \lambda_i$ . Il faut faire attention ici au fait que les  $\lambda_i$  ne sont pas tous distincts. Quitte à réindexer

les  $\lambda_i$ , on peut supposer que  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  sont distincts et que  $\lambda_{r+1}, \dots, \lambda_n$  apparaissent par les  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ . On prend alors le polynôme

$$Q(X) = \sum_{i=1}^r \lambda_i \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^r \frac{X - e^{\lambda_j}}{e^{\lambda_i} - e^{\lambda_j}}$$

- On a utilisé que pour tout  $M \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ ,  $\|M\|_2 = \rho(M)$ , où  $\rho$  est le rayon spectral. Cela vient du fait que pour tout  $M \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ ,  $\|M\|_2 = \sqrt{\rho({}^t M M)} = \sqrt{\rho(M^2)} = \rho(M)$ . Cependant, on peut le démontrer directement sans utiliser la décomposition polaire et donc la formule  $\|M\|_2 = \sqrt{\rho({}^t M M)}$ .

*Démonstration :* On procède par double inégalité.

*Montrons que  $\|M\|_2 \geq \rho(M)$  :*

Soit  $\lambda_0 = \rho(M)$ . Il existe donc un vecteur propre  $X_0$  de norme 1 tel que  $MX_0 = \lambda_0 X_0$ . Par suite

$$\begin{aligned} \|MX_0\|_2 &= \|\lambda_0 X_0\|_2 \Leftrightarrow \|MX_0\|_2 = |\lambda_0| \|X_0\|_2 \\ &\Rightarrow \|M\|_2 \|X_0\|_2 \geq |\lambda_0| \|X_0\|_2 \\ &\Rightarrow \|M\|_2 \geq |\lambda_0| = \rho(M) \end{aligned}$$

*Montrons que  $\|M\|_2 \leq \rho(M)$  :*

Comme  $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ . Il existe donc  $P \in O_n(\mathbb{R})$  telle que  $M = P \text{diag}(\lambda_i) P^{-1}$ . Par suite, pour tout  $X \in \mathbb{R}^n$  tel que  $\|X\|_2 = 1$ , on a

$$\begin{aligned} \|MX\|_2 &= \|P \text{diag}(\lambda_i) P^{-1} X\|_2 \\ &= \|P \text{diag}(\lambda_i) Y\|_2 \text{ en posant } Y = P^{-1} X \\ &= \|\text{diag}(\lambda_i) Y\|_2 \text{ car } P \in O_n(\mathbb{R}) \\ &= \left( \sum_{i=0}^n (\lambda_i y_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left( \sum_{i=0}^n \rho(M)^2 (y_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \rho(M) \underbrace{\|Y\|_2}_{=1} \text{ car } Y = P^{-1} X \text{ avec } \|X\|_2 = 1 \text{ et } P \in O_n(\mathbb{R}) \end{aligned}$$

donc  $\|M\|_2 = \sup_{\substack{X \in \mathbb{R}^n \\ \|X\|_2=1}} \|MX\|_2 \leq \rho(M)$ .

□

### Quelques conséquences de la décomposition polaire :

- **Corollaire :**

On en déduit les homéomorphismes suivants :

$$\text{GL}_n(\mathbb{R}) \approx O_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

$$\text{GL}_n(\mathbb{C}) \approx U_n \times \mathbb{R}^{n^2}$$

*Démonstration :*

Par la décomposition polaire, on a les homéomorphismes suivants :

$$O_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \xrightarrow{\sim} \text{GL}_n(\mathbb{R})$$

$$U_n \times \mathcal{H}_n^{++} \xrightarrow{\sim} GL_n(\mathbb{C})$$

et par l'exponentielle matricielle, on a les homéomorphismes suivants :

$$\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$$

$$\mathcal{H}_n \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}_n^{++}$$

Or  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  est un  $\mathbb{R}$ -e.v. de dimension  $\frac{n(n+1)}{2}$  donc il est isomorphe à  $\mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$ , et de même  $\mathcal{H}_n$ , est un  $\mathbb{R}$ -e.v. de dimension  $n^2$  donc il est isomorphe à  $\mathbb{R}^{n^2}$ . D'où le résultat.

□

- Mises en garde sur le développement : Ce développement est très proche, dans sa démonstration, de celui sur la décomposition polaire. Il est donc déconseillé de présenter les deux comme **seuls** développements.