

Equation de Bessel

Mohamed NASSIRI

Référence :

Exercices de mathématiques : Oraux X-ENS, Analyse 4, Serge Francinou, Hervé Gianella et Serge Nicolas, p.101 → 103

Recasage :

- 220 : Equations différentielles $X' = f(t, X)$. Exemples d'étude des solutions en dimension 1 et 2.
- 221 : Équations différentielles linéaires. Systèmes d'équations différentielles linéaires. Exemples et applications.
- 243 : Convergence des séries entières, propriétés de la somme. Exemples et applications.
- 241 : Suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples.
- 239 : Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications.

Résumé :

Ce développement illustre une méthode de résolution des équations différentielles par les fonctions développables en série entière. De plus, par l'utilisation du *wronskien*, on aura une jolie égalité entre une série entière et une intégrale à paramètre.

Prérequis :

Equations différentielles - Wronskien - Séries entières - Intégrales à paramètres - Théorème de dérivation sous le signe intégral

Théorème : On considère l'équation différentielle (dite *de Bessel*) suivante :

$$xy'' + y' + xy = 0 \quad (\mathcal{E})$$

(i) Alors il existe une unique solution f_0 développable en série entière telle que $f_0(0) = 1$. Elle est définie sur \mathbb{R} par :

$$f_0(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4^n (n!)^2} x^{2n}$$

(ii) Soit g une solution de (\mathcal{E}) sur l'intervalle $]0, a[$, avec $a > 0$. Alors

$$((g, f_0) \text{ est libre}) \Leftrightarrow (f \text{ n'est pas bornée au voisinage de } 0)$$

(iii) On en déduit donc que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \sin \theta) d\theta = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4^n (n!)^2} x^{2n}$$

Démonstration.

(i) Analyse : Soit f une solution de (\mathcal{E}) développable en série entière au voisinage de 0. Ainsi, il existe une suite de réels $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $R > 0$ tels que, pour tout $x \in]-R, R[$,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

On a alors, pour tout $x \in]-R, R[$,

$$\begin{aligned} x f(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} x^n \\ f'(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n \\ x f''(x) &= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} (n+1) n a_{n+1} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) n a_{n+1} x^n \end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned} 0 = x f(x) + f'(x) + x f''(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) n a_{n+1} x^n \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)^2 a_{n+1} x^n \\ &= a_1 + \sum_{n=1}^{+\infty} ((n+1)^2 a_{n+1} + a_{n-1}) x^n \end{aligned}$$

Par unicité du développement en série entière, on a nécessairement

$$\begin{cases} a_1 = 0 \\ (n+1)^2 a_{n+1} = -a_{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

On en déduit donc que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} a_{2n+1} = 0 \\ a_{2n} = \frac{(-1)^n a_0}{(2n)^2 (2n-2)^2 \dots 2^2} = \frac{(-1)^n a_0}{4^n (n!)^2} \end{cases}$$

Ainsi, pour tout $x \in]-R, R[$, on a

$$f(x) = a_0 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4^n (n!)^2} x^{2n}$$

Synthèse : On pose

$$a_0 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4^n (n!)^2} x^{2n}$$

La série a un rayon de convergence infini. En effet, en utilisant la règle de d'Alembert sur la série numérique $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ (pour $x \neq 0$) avec $a_n = \frac{(-1)^n x^{2n}}{4^n (n!)^2}$, on a

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(-1)^{n+1} x^{2(n+1)}}{4^{n+1} (n+1!)^2} \times \frac{4^n (n!)^2}{(-1)^n x^{2n}} = -\frac{x^2}{4(n+1)^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

La série entière définit donc une fonction f développable en série entière dont les coefficients vérifient les conditions précédentes. f est donc solution de (\mathcal{E}) .

De plus, comme $f(0) = a_0$, il existe une unique solution f_0 développable en série entière telle que $f_0(0) = 1$. Elle est définie sur \mathbb{R} par :

$$f_0(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4^n (n!)^2} x^{2n}$$

(ii) \Leftarrow : La fonction f_0 est continue sur \mathbb{R} donc bornée au voisinage de 0. Nécessairement, si la famille (g, f_0) est liée, alors g est bornée au voisinage de 0.

\Rightarrow : Supposons que la famille (g, f_0) est libre. Sur $]0, a[$, l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (\mathcal{E}) , que l'on peut réécrire

$$y'' + \frac{1}{x}y' + y = 0$$

est un espace vectoriel de dimension 2 donc (g, f_0) est une base.

Considérons le wronskien W de la famille (g, f_0) (i.e.) pour tout $x \in]0, a[$,

$$W(x) = \begin{vmatrix} g(x) & f_0(x) \\ g'(x) & f_0'(x) \end{vmatrix} = g(x)f_0'(x) - g'(x)f_0(x)$$

D'où

$$\begin{aligned} W'(x) &= g'(x)f_0'(x) + g(x)f_0''(x) - g''(x)f_0(x) - g'(x)f_0'(x) \\ &= g(x)f_0''(x) - g''(x)f_0(x) \\ &= g(x) \left(-\frac{1}{x}f_0'(x) - f_0(x) \right) - \left(-\frac{1}{x}g'(x) - g(x) \right) f_0(x) \\ &= -\frac{1}{x}W(x) \end{aligned}$$

Par conséquent, il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que, pour tout $x \in]0, a[$,

$$W(x) = Ce^{-\ln x} = \frac{C}{x}$$

et $C \neq 0$ puisque la famille (g, f_0) est libre. Par suite, on a, pour tout $x \in]0, a[$,

$$g(x)f_0'(x) - g'(x)f_0(x) = \frac{C}{x}$$

Supposons que g soit bornée au voisinage de 0. Comme $\lim_{x \rightarrow 0^+} f_0(x) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} f_0'(x) = 0$, alors on a

$$g'(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{C}{x}$$

Soit $b \in]0, a[$. La fonction g' garde un signe constant sur $]0, b[$ et n'est pas intégrable sur $]0, b[$. On en déduit, par le théorème d'intégration des relations de comparaison,

$$g(x) - g(b) = \int_b^x g'(t)dt \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -C \int_b^x \frac{1}{t}dt - C(\ln x - \ln b)$$

Par suite, $g(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -C \ln x$, puis $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = +\infty$. Ce qui est absurde (puisque g est supposée bornée au voisinage de 0).

D'où le résultat.

(iii) La fonction $(x, \theta) \in \mathbb{R}^2 \rightarrow \frac{1}{\pi} \cos(x \sin \theta)$ est de classe \mathcal{C}^∞ . On en déduit donc la fonction $g : x \rightarrow \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \sin \theta) d\theta$ est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} . En appliquant le théorème de dérivation sous le signe intégrale, on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$g'(x) = -\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin(x \sin \theta) \sin \theta d\theta$$

$$g''(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \sin \theta) \sin^2 \theta d\theta$$

Ainsi, on a donc

$$xg(x) + g'(x) + xg''(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (x \cos(x \sin \theta) \cos^2 \theta - \sin(x \sin \theta) \sin \theta) d\theta$$

$$= \frac{1}{\pi} [\sin(x \sin \theta) \cos \theta]_0^\pi = 0$$

Donc g est solution de (\mathcal{E}) .

De plus, g est bornée sur \mathbb{R} , donc d'après (ii), la famille (g, f_0) est liée sur $]0, +\infty[$, donc sur \mathbb{R}_+ par continuité. En remarquant que $f_0(0) = g(0) = 1$ (la constante λ qui vérifie $f_0(x) = \lambda g(x)$, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, vaut donc 1) et que les fonctions g et f_0 sont paires (ce qui nous donne l'égalité sur \mathbb{R} tout entier), on a donc bien, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \sin \theta) d\theta = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4^n (n!)^2} x^{2n}$$

□

Remarques :

- **Pendule de Bessel :**

Cette équation de la physique intervient dans le pendule de Bessel : il s'agit d'un pendule simple oscillant dont on suppose que la longueur du fil peut varier. L'angle vérifie une équation différentielle de Bessel.

- **Fonctions de Bessel :**

- **Equivalents d'intégrales :** GOU p159

Théorème :

Démonstration :

□