Diagonalisabilité de $\exp(A)$

Mohamed NASSIRI

Référence :

Histoires hédonistes de groupes et de géometries, Tome second, Philippe Caldero et Jérôme Germoni, p. 381

Recasage :

●●●●● 156 : Exponentielle de matrices. Applications.
●●●●● 155 : Endomorphismes diagonalisables en dimension finie.
●●●●○ Endomorphismes trigonalisables. Endomorphismes nilpotents.

Résumé :

Il s'agit d'une belle application de la décomposition de Dunford qui nous donne une condition nécessaire et suffisante pour la diagonalisabilité de $\exp(A)$ portant sur la diagonalisabilité de A. Au passage, on se propose de résoudre l'équation $\exp(A) = I_n$.

Prérequis :

Matrices diagonalisables - Matrices nilpotentes - Décomposition de Dunford

---

Théorème : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
(i) A est diagonalisable si et seulement si $\exp(A)$ l'est.
(ii) $\exp(A) = I_n$ si et seulement si A est diagonalisable et $\mathrm{Sp}(A) \subset 2i\pi\mathbb{Z}$

Démonstration. (i) $\underline{\Rightarrow}$

Si A est diagonalisable, alors il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $A = PDP^{-1}$ avec $D = \mathrm{diag}(d_1, ..., d_n)$. Par suite, on a

$$\exp(A) = P\exp(D)P^{-1}, \quad \text{avec } \exp(D) = \mathrm{diag}(e^{d_1}, ..., e^{d_n})$$

Donc $\exp(A)$ est bien diagonalisable.

$\underline{\Leftarrow :}$ Soit $A = N + D$ la décomposition de Dunford de A. Le but est de démontrer que $N = 0$.
Comme N et D commutent, on a donc

$$\begin{aligned} \exp(A) = \exp(D+N) = &\exp(D)\exp(N) \\ &= \exp(D)(I_n + \exp(N) - I_n) \\ &= \exp(D) + \underbrace{\exp(D)(\exp(N) - I_n)}_{:=N'} \end{aligned}$$

Montrons que $\exp(A) = \exp(D) + N'$ *est la décomposition de Dunford de* $\exp(A)$ *:*

∘ Comme D est diagonalisable, par ce qui précède, on a $\exp(D)$ est diagonalisable
∘ Par ailleurs, $\exp(D)$ commute avec N et donc avec N'.
∘ Pour finir, N' est nilpotente. En effet, en notant n l'indice de nilpotence de N, on a

$$\begin{aligned} N' = \exp(D)(\exp(N) - I_n) &= \exp(D)\left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{N^k}{k!} - I_n\right) \\ &= \exp(D)\left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{N^k}{k!}\right) \qquad (\dagger) \\ &= \exp(D)N \underbrace{\left(\sum_{k=0}^{n-2} \frac{N^k}{k!}\right)}_{:=P(N)} \end{aligned}$$

Par suite, comme $\exp(D)$, N et $P(N)$ commutent, on a donc

$$(\exp(D)NP(N))^n = \exp(D)^n \underbrace{N^n}_{=0_n} P(N)^n = 0_n$$

Donc $\exp(A) = \exp(D) + N'$ est bien la décomposition de Dunford de $\exp(A)$.

Maintenant, puisque $\exp(A)$, $N' = 0$ (par unicité de la décomposition de Dunford). Par $(\dagger)$, on a donc, puisque $\exp(D)$ est inversible, $Q(N) := \sum_{k=1}^{n-1} \frac{N^k}{k!} = 0$. Or le polynôme minimal de N est X^n, et Q est un polynôme annulateur de degré inférieur ou égal à $n-1$. Par conséquent, $N = 0$.

(ii) $\underline{\Rightarrow}$

Comme $\exp(A) = I_n$, manifestement $\exp(A)$ et donc par ce qui précde A est diagonalisable. Par conséquent, il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $A = PDP^{-1}$ avec $D = \mathrm{diag}(d_1, ..., d_n)$ (bien évidemment, les d_j, $1 \leq j \leq n$, sont les valeurs propres de A). Par suite, on a

$$I_n = \exp(A) = P\exp(D)P^{-1}, \quad \text{avec } \exp(D) = \mathrm{diag}(e^{d_1}, ..., e^{d_n})$$

Ce qui implique nécessairement que $d_j \in 2i\pi\mathbb{Z}$ pour $1 \leq j \leq n$.

$\underline{\Leftarrow}$: La réciproque est immédiate. Si A est diagonalisable et que ses valeurs propres $d_j \in 2i\pi\mathbb{Z}$ pour $1 \leq j \leq n$, alors il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $A = PDP^{-1}$ avec $D = \mathrm{diag}(d_1, ..., d_n)$. Par suite,

$$\exp(A) = P\exp(D)P^{-1} = PP^{-1} = I_n, \quad \text{car } \exp(D) = \mathrm{diag}(e^{d_1}, ..., e^{d_n}) = I_n$$

□

Remarques :

- **Rq :**
- ...

Théorème :

Démonstration :

□