

Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel euclidien (de dimension finie).

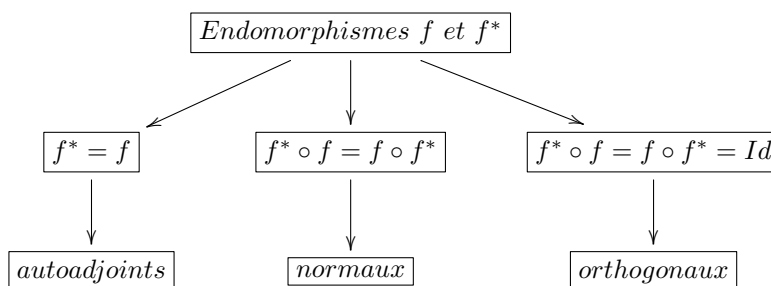
Mohamed NASSIRI

On se place dans un espace euclidien et donc on aura plein de propriétés géométriques, notamment grâce au produit scalaire.

A partir de la définition des endomorphismes adjoints, c'est-à-dire que l'on se donne un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$, et on a l'existence d'un et d'un seul endomorphisme f^* de E tel que

$$\langle f(x), y \rangle = \langle x, f^*(y) \rangle \quad \forall x, y \in E$$

On va s'intéresser aux relations suivantes entre f et f^* :



Les endomorphismes autoadjoints vont nous conduire au célèbre théorème spectral et aux matrices de Gram qui nous permettent d'obtenir la distance en un point et un sous-espace vectoriel.

La réduction des endomorphismes normaux va quand à elle nous conduire à la réduction peu connue des matrices antisymétriques.

Quant aux endomorphismes orthogonaux, leur étude est encore plus passionnante. Par exemple, l'ensemble des endomorphismes orthogonaux forment un groupe et leur réduction permet d'obtenir divers résultats intéressants. Pour finir, les applications sont variées. On a les homéomorphismes telle que la décomposition polaire et entre les espaces $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, mais également une application à l'algèbre des quaternions.

Références

- [GRI] Algèbre linéaire 5e Edition, Joseph Grifone
- [GOUal] Les maths en tête : Algèbre, Xavier Gourdon
- [PER] Cours d'Algèbre, Daniel Perrin ♠
- [FGNag3] Algèbre 3 Orais X-ENS, Serge Francinou, Hervé Gianella et Serge Nicolas ♠
- [H2G2t1] Histoires hédonistes de groupes et de géométries - Tome 1, Philippe Caldero et Jérôme Germoni ♠

Développements

- Décomposition polaire
- Points extrémaux de la boule unité de $\mathcal{L}(E)$
- Homéomorphisme entre $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$
- $SO_3(\mathbb{R})$ et les quaternions

Soit E un espace euclidien de dimension finie n .
On note $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E .

0 Endomorphismes adjoints [GRI] p.238

Proposition-Définition 1 Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Il existe un et un seul endomorphisme f^* de E tel que

$$\langle f(x), y \rangle = \langle x, f^*(y) \rangle \quad \forall x, y \in E$$

f^* est dit adjoint de f .

Matriciellement, si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormée de E et que $A = \text{Mat}(f)_{\mathcal{B}}$, alors la matrice $A^* = \text{Mat}(f^*)_{\mathcal{B}}$ est la transposée de A :

$$A^* = {}^t A$$

Proposition 2 Soit $f, g \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

- (i) $f^{**} = f, \quad \text{Id}^* = \text{Id}$
- (ii) $(f + g)^* = f^* + g^*, \quad (\lambda f)^* = \lambda f^*$
- (iii) $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$
- (iv) $\text{rg} f^* = \text{rg} f, \quad \det f^* = \det f$

Proposition 3 Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Si F est un s.e.v. de E stable par f , alors F^\perp est stable par f^* .

1 Endomorphismes autoadjoints

1.1 Définitions et exemples [GRI] p.252

Définition 4 Un endomorphisme f d'un espace euclidien est dit autoadjoint si

$$\langle f(x), y \rangle = \langle x, f(y) \rangle \quad \forall x, y \in E$$

En d'autres termes, f est autoadjoint si $f^* = f$.

Matriciellement, f est autoadjoint si et seulement si la matrice qui le représente dans une base orthonormée est symétrique.

Exemple 5 Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. $f^* \circ f$ est un endomorphisme autoadjoint.

1.2 Réduction [GRI] p.252 → 254

Théorème 6 Soit f un endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien. Alors :

- (i) f est diagonalisable.
- (ii) Les sous-espaces propres de f sont deux à deux orthogonaux.

Corollaire 7 Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Il existe alors $P \in \text{O}_n(\mathbb{R})$ telle que la matrice $A' = {}^t P A P$ soit diagonale.

Remarque 8 Les matrices symétriques complexes (non réelles) ne sont pas nécessairement diagonalisables (ni dans \mathbb{R} , ni dans \mathbb{C}). Par exemple, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2i \end{pmatrix}$ est symétrique et non diagonalisable.

Proposition 9 Soient s une forme bilinéaire symétrique sur E et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . Alors s définit un produit scalaire si et seulement si la matrice $S = \text{Mat}(s)_{\mathcal{B}}$ a toutes ses valeurs propres strictement positives.

1.3 Matrices de Gram [GRI] p.258 & p.266

Définition 10 Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien et $\{v_1, \dots, v_p\}$ une famille ordonnée de vecteurs de E . On appelle matrice de Gram associée la famille (v_1, \dots, v_p) , la matrice

$$\text{Gram}(v_1, \dots, v_p) = \begin{pmatrix} \langle v_1, v_1 \rangle & \dots & \langle v_1, v_p \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle v_p, v_1 \rangle & \dots & \langle v_p, v_p \rangle \end{pmatrix}$$

On note $G(v_1, \dots, v_p) = \det(\text{Gram}(v_1, \dots, v_p))$.

Théorème 11 Soient $\{v_1, \dots, v_p\}$ une famille libre de E , $F = \text{Vect}\{v_1, \dots, v_p\}$ et $x \in E$. Alors,

$$d(x, F)^2 = \frac{G(x, v_1, \dots, v_p)}{G(v_1, \dots, v_p)}$$

2 Endomorphismes normaux

2.1 Définitions et exemples [GOUal] p.258

Définition 12 Un endomorphisme f d'un espace euclidien est dit normal si

$$f^* \circ f = f \circ f^*$$

Matriciellement, f est normal si et seulement si la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui le représente dans une base orthonormée est normale (${}^t A A = A {}^t A$).

Exemple 13 En particulier sont normales, les matrices (anti)symétriques réelles. [GRI] p.286

2.2 Réduction [GOUal] p.259 → 261

Lemme 14 Soient E un espace euclidien de dimension 2 et $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme normal n'admettant pas de valeurs propres réelles. Dans toute base \mathcal{B} orthonormale de E , la matrice de f a la forme

$$\text{Mat}(f)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, \quad \text{avec } b \neq 0$$

Théorème 15 Soient E un espace euclidien et $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme normal. Alors il existe une

base orthogonale \mathcal{B} de E telle que

$$\text{Mat}(f)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_r & & & \\ & & & \tau_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & 0 & & & & \tau_s \end{pmatrix},$$

où pour tout i , $\lambda_i \in \mathbb{R}$ et pour tout j ,

$$\tau_j = \begin{pmatrix} a_j & -b_j \\ b_j & a_j \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

Théorème 16 Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice anti-symétrique. Alors il existe une matrice orthogonale P telle que

$$P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 0 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 0 & & & \\ & & & \tau_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & 0 & & & & \tau_s \end{pmatrix},$$

où pour tout i ,

$$\tau_i = \begin{pmatrix} 0 & -b_i \\ b_i & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

3 Endomorphismes orthogonaux

3.1 Définitions et premières propriétés [GRI] p.239 → 241

Définition 17 $f \in \mathcal{L}(E)$ est dit endomorphisme orthogonal si

$$\langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle \quad \forall x, y \in E$$

On note $O(E)$ l'ensemble des endomorphismes orthogonaux de E .

Proposition 18 Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Les propositions suivantes sont équivalentes :

- (i) $\langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle \quad \forall x, y \in E$
- (ii) $\|f(x)\| = \|x\| \quad \forall x \in E$
- (iii) Si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E et $A = \text{Mat}(f)_{\mathcal{B}}$, alors ${}^tAA = A^tA = I_n$

Proposition-Définition 19 Soit $f \in O(E)$, alors :

- (i) Les valeurs propres de f sont $+1$ et -1 .
 - (ii) $\det f = \pm 1$. En particulier, f est bijective.
- Les endomorphismes orthogonaux de déterminant $+1$ sont dites directes; celles de déterminant -1 sont dites indirectes.

Proposition 20 f est un endomorphisme orthogonal si et seulement si elle transforme toute base orthonormée en une base orthonormée.

Pour cela, il suffit qu'il existe une base orthonormée qui, par f , est transformée en une base orthonormée.

3.2 Réduction [GOUal] p.256-257

Théorème 21 Soient E un espace euclidien et $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme orthogonal. Alors il existe une base orthonormale \mathcal{B} de E telle que

$$\text{Mat}(f)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} R(\theta_1) & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & R(\theta_r) & & & \\ & & & \epsilon_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & 0 & & & & \epsilon_s \end{pmatrix},$$

où pour tout j , $\epsilon_j \in \{\pm 1\}$ et pour tout i ,

$$R(\theta_i) = \begin{pmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

avec $\theta_i \in \mathbb{R}$, $\theta_i \not\equiv 0 \pmod{\pi}$

3.3 Groupe orthogonal [GRI] p.240 → 243

Proposition-Définition 22 L'ensemble

$$O_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid {}^tAA = A^tA = I_n\}$$

vérifie les propriétés suivantes :

- (i) si $A, B \in O_n(\mathbb{R})$, alors $AB \in O_n(\mathbb{R})$
- (ii) $I_n \in O_n(\mathbb{R})$
- (iii) si $A \in O_n(\mathbb{R})$, alors $A^{-1} \in O_n(\mathbb{R})$

En particulier, $O_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe du groupe linéaire $GL_n(\mathbb{R})$, dit groupe orthogonal.

Proposition-Définition 23 L'ensemble

$$SO_n(\mathbb{R}) = \{A \in O_n(\mathbb{R}) \mid \det A = 1\}$$

est un groupe, dit groupe spécial orthogonal.

Exemple 24 $A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \in SO_3(\mathbb{R})$

Proposition 25 La matrice de passage d'une base orthonormée à une base orthonormée est une matrice orthogonale.

Proposition 26 Etude de $O_2(\mathbb{R})$: Soit $A \in O_2(\mathbb{R})$. Alors :

- soit $A \in SO_2(\mathbb{R})$ et dans ce cas

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

(rotation d'angle θ et de centre O)
 - soit $A \notin SO_2(\mathbb{R})$ et dans ce cas

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

(symétrie orthogonale par rapport à la droite d'angle polaire $\theta/2$)

Proposition 27 Etude de $O_3(\mathbb{R})$: Soient $A \in O_3(\mathbb{R})$ et f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 tel que $A = \text{Mat}(f)_{\mathcal{B}}$ (où \mathcal{B} est la base canonique). Alors il existe une base orthonormée \mathcal{B}' de \mathbb{R}^3 telle que

$$A' = \text{Mat}(f)_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon \end{pmatrix}$$

où $\epsilon = +1$ si $\det A = 1$, (i.e.) $A \in SO_3(\mathbb{R})$;
 et $\epsilon = -1$ si $\det A = -1$, (i.e.) $A \notin SO_3(\mathbb{R})$

3.4 Application 1 : Quelques homéomorphismes [H2G2t1] p.202 → 210

Théorème 28 ♠ Décomposition polaire ♠
 On a les homéomorphismes suivants :

$$O_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \xrightarrow{\sim} GL_n(\mathbb{R}), (O, S) \mapsto OS$$

$$U_n \times \mathcal{H}_n^{++} \xrightarrow{\sim} GL_n(\mathbb{C}), (U, H) \mapsto UH$$

Corollaire 29 ♠ Points extrémaux de la boule unité
 de $\mathcal{L}(E)$: ♠ Soit E un espace euclidien et $B = \{f \in \mathcal{L}(E) \mid \|f\| \leq 1\}$, alors les points extrémaux de B sont les éléments de $O(E)$. [FGNag3] p.130-131

Théorème 30 ♠ Homéomorphisme entre $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$
 et $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ ♠

- L'application $\exp : \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ est un homéomorphisme.
- L'application $\exp : \mathcal{H}_n \rightarrow \mathcal{H}_n^{++}$ est un homéomorphisme.

Corollaire 31 On en déduit les isomorphismes suivants :

$$GL_n(\mathbb{R}) \approx O_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

$$GL_n(\mathbb{C}) \approx U_n \times \mathbb{R}^{n^2}$$

3.5 Application 2 : Quaternions [PER] p.160 → 164

Proposition-Définition 32 Il existe une algèbre \mathbb{H} de dimension 4 sur \mathbb{R} , appelé algèbre des quaternions, muni d'une base $1, i, j, k$ telle que :

(i) 1 est élément neutre pour la multiplication,
 (ii) on a les formules

$$jk = -kj = i, \quad ki = -ik = j, \quad ij = -ji = k$$

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1$$

Un quaternion s'écrit alors

$$q = a + bi + cj + dk, \quad \text{avec } a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

\mathbb{H} est muni de la norme algébrique N suivante :
 $\forall q = a + bi + cj + dk \in \mathbb{H}, N(q) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$

Proposition 33 Soit G le groupe des quaternions de norme 1. Alors G est connexe.

Théorème 34 Soit G le groupe des quaternions de norme 1. On a l'isomorphisme suivant :

$$G/\{-1, 1\} \xrightarrow{\sim} SO_3(\mathbb{R})$$

Questions

Exercice : 1) Montrer que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifie ${}^tAA = 0$, alors $A = 0$.
2) Le résultat est-il encore vrai sur \mathbb{C} ?

Solution : 1) L'idée est de revenir aux endomorphismes pour avancer et de constater que le point de vue matriciel a ses limites ...

Soit f l'endomorphisme associé à A dans la base canonique. Ainsi, ${}^tAA = 0$ se traduit par $f^* \circ f = 0$. Par suite, $\forall x \in E$,

$$0 = \langle f^* \circ f(x), x \rangle = \langle f(x), f(x) \rangle = \|f(x)\|^2$$

Cela implique que $f(x) = 0$, $\forall x \in E$, donc $f = 0$ (i.e.) $A = 0$.

2) La réponse est non ! En considérant la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$, on a ${}^tAA = 0$ et pourtant $A \neq 0$.

Exercice : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme normal. Montrer que si F est stable par f , alors F^\perp est stable par f .

Solution : Considérons une base orthonormée \mathcal{B} adaptée à la décomposition $E = F \oplus F^\perp$, alors

$$\text{Mat}(f)_{\mathcal{B}} = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & C \end{array} \right)$$

L'idée est de montrer que $B = 0$.

D'une part,

$$\text{Mat}(f^*)_{\mathcal{B}} = \left(\begin{array}{c|c} {}^tA & 0 \\ \hline {}^tB & {}^tC \end{array} \right)$$

D'autre part, comme f est normal, on a $f^* \circ f = f \circ f^*$. Par suite, on a

$$\left(\begin{array}{c|c} {}^tAA & {}^tAB \\ \hline {}^tBA & {}^tBB + {}^tCC \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} A{}^tA & B{}^tC \\ \hline C{}^tB & C{}^tC \end{array} \right)$$

Le bloc en bas à droite nous donne

$$\begin{aligned} {}^tBB + {}^tCC &= C{}^tC \Rightarrow \text{Tr}({}^tBB + {}^tCC) = \text{Tr}(C{}^tC) \\ &\Rightarrow \text{Tr}({}^tBB) + \text{Tr}({}^tCC) = \text{Tr}(C{}^tC) \\ &\Rightarrow \text{Tr}({}^tBB) = 0 \\ &\Rightarrow B = 0 \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\text{Mat}(f)_{\mathcal{B}} = \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & C \end{array} \right)$$

Et ainsi, F^\perp est stable par f .

Exercice : Montrer que $\text{Vect}(O_n(\mathbb{R})) = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Solution : On peut déjà regarder ce qu'il se passe pour $n = 1$. On a

$$O_1(\mathbb{R}) = \{\pm 1\} \text{ et } \mathcal{M}_1(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$$

Incontestablement, on a $\text{Vect}(O_1(\mathbb{R})) = \text{Vect}(\{\pm 1\}) = \mathbb{R} = \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$

Pour montrer que $\text{Vect}(O_n(\mathbb{R})) = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on va montrer que $O_n(\mathbb{R})$ n'est jamais contenu dans un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Il faut donc se rappeler la caractérisation des hyperplans de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

Soit H un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. C'est donc le noyau d'une forme linéaire non nulle φ (*i.e.*)

$$H = \text{Ker}(\varphi) = \{X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \varphi(X) = 0\}$$

Or, pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. L'application

$$\begin{aligned} f_A : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) &\rightarrow \mathbb{R} \\ X &\mapsto \text{Tr}(AX) \end{aligned}$$

induit un isomorphisme f entre $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ et son dual $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^*$

$$\begin{aligned} f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) &\rightarrow (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^* \\ A &\mapsto f_A \end{aligned}$$

Par conséquent, $\exists A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\varphi(X) = \text{Tr}(AX)$, $\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Ainsi,

$$H = \{X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \text{Tr}(AX) = 0\}$$

Donc il nous suffit de montrer qu'il existe $X \in O_n(\mathbb{R})$ telle que $\text{Tr}(AX) \neq 0$. Allons-y !

Par le théorème de décomposition polaire, il existe un couple $(O, S) \in O_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ tel que $A = OS$. Par conséquent,

$$\text{Tr}(AX) = \text{Tr}(OSX)$$

En prenant, $X = O^{-1} \in O_n(\mathbb{R})$, on a

$$\text{Tr}(AX) = \text{Tr}(OSO^{-1}) = \text{Tr}(S) \neq 0 \quad \text{car } S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$$