Exponentielle de matrices. Applications.

Mohamed NASSIRI

Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, l'idée sera ici de généraliser l'application exponentielle $\exp : \mathbb{K} \to \mathbb{K}^*$ en une application $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, par la série convergente $\exp(M) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} M^k$. L'analogie avec l'exponentielle sur $\mathbb{K}$ est frappante :

$$\begin{aligned} \exp : \mathbb{K} &\to \mathbb{K} \\ z &\mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) &\to \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ M &\mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} M^k \end{aligned}$$

On va s'intéresser à plusieurs propriétés de notre nouvelle application : injectivité, surjectivité, régularité, homéomorphisme, etc.

De plus, à partir de la décomposition de Duford (additive) d'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on pourra obtenir, grâce à l'exponentielle de matrices, une décomposition de Duford (multiplicative) de $\exp(M)$:

$$M = D + N \quad \xrightarrow{\exp} \quad \exp(M) = \exp(D)\exp(N)$$

Une des applications importantes de l'exponentielle de matrices est la résolution de systèmes différentiels linéaires à coefficients constants, où encore une fois, l'analogie est frappante avec les systèmes en dimension 1

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} x(t) = Ax(t), \\ x(0) = x_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \end{cases} \quad \text{avec } A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ x(t) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \quad \xrightarrow{solutions} \quad x(t) = e^{tA} x_0$$

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} x(t) = ax(t), \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R} \end{cases} \quad \text{avec } a \in \mathbb{R} \text{ et } x(t) \in \mathbb{R} \quad \xrightarrow{solutions} \quad x(t) = x_0 e^{at}$$

Références

[GRI] Algèbre linéaire 5e Edition, Joseph Grifone
[ML3al] Mathématiques L3 Algèbre, Jean-Pierre Marco
[H2G2t1] Histoires hédonistes de groupes et de géométries - Tome 1, Philippe Caldero et Jérôme Germoni ♠

Développements

M est diagonalisable $\Leftrightarrow e^M$ est diagonalisable
Homéomorphisme entre $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$

0 Suites et séries de matrices

Proposition 1 *$\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est un espace vectoriel normé pour la norme définie par : pour $M = (m_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$:*

$$||M|| := \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} |m_{ij}|^2} = \mathrm{Tr}(M^*M)$$

$\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est un espace métrique pour la distance définie par : pour $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$:

$$\mathrm{d}(M, N) := ||M - N||$$

Proposition 2 *Soient $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, alors :*

$$||MN|| \leq ||M||.||N||$$

Définition 3 • *On dit qu'une suite de matrices (M_n) converge vers la matrice M si*

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0) \Rightarrow (\mathrm{d}(M_n, M) \leq \epsilon)$$

• *On dit qu'une série de matrices $\sum_{n=0}^{+\infty} M_n$ converge si la suite des sommes partielles $S_k = \sum_{n=0}^{k} M_n$ converge ; dans ce cas, la limite de S_k est appelé somme de la série.*

• *On dit qu'une série de matrices est absolument convergente si la série numérique $\sum_{n=0}^{+\infty} ||M_n||$ converge.*

1 Définition et calculs

1.1 Définitions et premières propriétés [ML3al] p.349

Définition 4 *L'application exponentielle matricielle* $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *est définie, pour tout* $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$*, par la série convergente* $\exp(M) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} M^k$.

Proposition 5 *L'application* $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *est continue.*

Proposition 6 *Soient* $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *telles que* $MN = NM$*, alors* $\exp(M+N) = \exp(M)\exp(N)$

Corollaire 7 *Pour tout* $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\exp(M) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ *et* $(\exp(M))^{-1} = \exp(-M)$.

1.2 Calculs [ML3al] p.350

Proposition 8 *1) Pour tout* $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ *et tout* $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$*, on a* $\exp(PMP^{-1}) = P\exp(M)P^{-1}$.
2) Si $\Delta = \mathrm{diag}(x_1, ..., x_n)$*, alors* $\exp(\Delta) = \mathrm{diag}(e^{x_1}, ..., e^{x_n})$
3) Si Δ *est triangulaire supérieure avec pour diagonale* $\mathrm{diag}(x_1, ..., x_n)$*, alors* $\exp(\Delta)$ *est triangulaire supérieure avec pour diagonale* $\mathrm{diag}(e^{x_1}, ..., e^{x_n})$.
4) Pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$*, on a* $\det(\exp(M)) = \exp(\mathrm{Tr}(M))$.
5) Pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$*, on a* ${}^t(\exp(M)) = \exp({}^tM)$.
6) Pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$*, on a* $\overline{\exp(M)} = \exp(\overline{M})$.
7) Si $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *est nilpotente, alors* $\exp(N)$ *est unipotente.*

Proposition 9 *Décompositions de Duford :*
Si $M = D + N$ *est la décomposition de Duford additive dans* $\mathbb{C}$ *de* $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$*, alors*
(i) $\exp(M) = \exp(D)\exp(N)$ *est la décomposition de Duford multiplicative de* $\exp(M)$*,*
(ii) $\exp(M) = \exp(D) + \exp(D)(\exp(N) - I_n)$ *est la décomposition de Duford additive de* $\exp(M)$.

Proposition 10 *Soit* $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
(i) M *est diagonalisable* $\Leftrightarrow e^M$ *est diagonalisable.*
(ii) $e^M = I_n \Leftrightarrow \mathrm{sp}(M) \subset 2i\pi\mathbb{Z}$.

2 Propriétés de la fonction exponentielle

2.1 Injectivité [H2G2t1] p.210

Proposition 11 *L'application exponentielle matricielle n'est pas injective.*

Exemple 12 • *Sur* $\mathbb{C}$, $\exp(2ik\pi) = 1$ *pour tout entier* k.
• *Sur* $\mathbb{R}$*,*

$$\exp\begin{pmatrix} 0 & -2k\pi \\ 2k\pi & 0 \end{pmatrix} = I_2 \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

2.2 Surjectivité [ML3al] p.358-359

Proposition 13 *L'application* $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ *est surjective.*
Plus précisément, pour tout $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$*, il existe* $P \in \mathbb{C}[X]$ *tel que* $M = \exp(P(M))$.

Corollaire 14 *Le sous-espace* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ *de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *est connexe par arcs.*

Proposition 15 *Pour* $n > 1$*, l'application* $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$ *n'est pas surjective.*
Plus précisement, $\exp(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) = \{M^2 \mid M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})\}$*. De plus, pour tout* $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$*, il existe* $P \in \mathbb{R}[X]$ *tel que* $M^2 = \exp(P(M))$.

2.3 Régularité [ML3al] p.350 → 353

Proposition 16 *L'exponentielle matricielle est différentiable en* 0_n *et* $D\exp(0_n) = Id_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$

Théorème 17 (admis)
L'exponentielle matricielle est de classe C^1 *sur* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *et, pour tout* $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$*, on a*

$$D\exp(M) = \exp(M)F(\mathrm{ad}(M))$$

où

$$\begin{aligned} \mathrm{ad}(M) : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) &\to \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ N &\mapsto MN - NM \end{aligned}$$

et, pour tout application $\mathbb{R}$*-linéaire* $\Phi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $F(\Phi) : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *est définie par* $F(\Phi) = \sum_{j \geq 0} \frac{(-1)^j}{(j+1)!} \Phi^j$.

2.4 Homéomorphismes [H2G2t1] p.202 → 210

Théorème 18 ♠ *Homéomorphisme entre* $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ *et* $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ ♠
• *L'application* $\exp : \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ *est un homéomorphisme.*
• *L'application* $\exp : \mathcal{H}_n \to \mathcal{H}_n^{++}$ *est un homéomorphisme.*

Corollaire 19 *On en déduit les isomorphismes suivants :*

$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \approx \mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \approx \mathrm{U}_n \times \mathbb{R}^{n^2}$$

3 Applications aux équations différentielles [GRI] p.376-377

Proposition 20 *Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $t \in \mathbb{R}$, on a :*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(e^{tA}) = Ae^{tA}$$

Proposition 21 *Soit $x' = Ax$ un système différentiel linéaire à coefficients constants avec $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $x \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Alors la solution qui pour $t = 0$ prend la valeur $x_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est :*

$$x(t) = e^{tA}x_0 \quad \forall t > 0$$

Corollaire 22 *Soit $x' = Ax$ un système différentiel linéaire à coefficients constants avec $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $x \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Si une solution passe à un instant donné par un sous-espace propre E_λ, elle reste dans E_λ.*

Questions

Exercice : 1) Soient $\mathcal{U}(n) = \{Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mid Q^*Q = I_n\}$ et $u(n) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mid A^* + A = 0_n\}$.
Montrer que $\exp : u(n) \to \mathcal{U}(n)$.
2) Soient $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R}) = \{Q \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \mid \det Q = 1\}$ et $o_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid {}^tA + A = 0_n\}$.
Montrer que $\exp : o_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$.

Solution : 1) Soit $A \in u(n)$. On a donc

$$\exp(A^* + A) = \exp(0_n) = I_n \qquad (\dagger)$$

Or A et A^* commutent donc $\exp(A^* + A) = \exp(A^*)\exp(A)$ et, par continuité de l'application exp, $\exp(A^*) = \exp(A)^*$. Ainsi, $(\dagger)$ devient

$$\exp(A)^*\exp(A) = I_n$$

Par conséquent, $\exp(A) \in \mathcal{U}(n)$.

2) L'argument est le même pour montrer que si $A \in o_n(\mathbb{R})$, alors $\exp(A) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. En effet, soit $A \in o_n(\mathbb{R})$. On a donc

$$\exp({}^tA + A) = \exp(0_n) = I_n \qquad (\dagger\dagger)$$

Or A et ${}^tA$ commutent donc $\exp({}^tA + A) = \exp({}^tA)\exp(A)$ et, par continuité de l'application exp, $\exp({}^tA) ={}^t \exp(A)$. Ainsi, $(\dagger\dagger)$ devient

$${}^t\exp(A)\exp(A) = I_n$$

Par conséquent, $\exp(A) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

Montrons que $\exp(A) \in \mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$: Soit $A \in o_n(\mathbb{R})$, on sait que

$$\det(\exp A) = \exp(\mathrm{Tr}A)$$

Il suffit donc de montrer que $\mathrm{Tr}A = 0$. Or comme $A \in o_n(\mathbb{R})$,

$$0 = \mathrm{Tr}(0_n) = \mathrm{Tr}({}^tA + A) = 2\mathrm{Tr}A \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Tr}A = 0$$

Conclusion : $\exp(A) \in \mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$.

Exercice : Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, dire si les matrices suivantes appartiennent à l'image de exp :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Solution : L'application $\exp \; : \; \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$. Or $\det A < 0$, donc $A \notin \mathrm{Im}(\exp)$.

Pour la matrice B, l'argument ne marche pas : $\det B > 0$, mais cela ne veut pas dire que $B \in \mathrm{Im}(\exp)$ ...
On a un résultat plus précis sur l'image de l'exponentielle : $\exp(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) = \{M^2 \mid M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})\}$.
On va proposer deux méthodes.

Méthode 1 :
Ainsi, si $B \in \mathrm{Im}(\exp)$, alors $B = M^2$, avec $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Cherchons les valeurs propres de M.
Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de M associée au vecteur propre $y \in \mathbb{C}^n \backslash \{0\}$. Alors

$$My = \lambda y$$

De plus, comme $B = M^2$, il existe $x \in \mathbb{C}^n \backslash \{0\}$, telle que

$$M^2 x = -x \qquad (\dagger)$$

car -1 est (la seule) valeur propre de $B = M^2$. Par conséquent,

$$M^2 y = MMy = M\lambda y = \lambda M y = \lambda^2 y$$

Nécessairement, par la relation ($\dagger$), on en déduit que $\lambda^2 = -1$ et donc $\lambda = \pm i$
Par conséquent, M est diagonalisable sur $\mathbb{C}$, donc M^2 aussi et, par suite, M^2 serait équivalente à $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Absurde !

Méthode 2 :

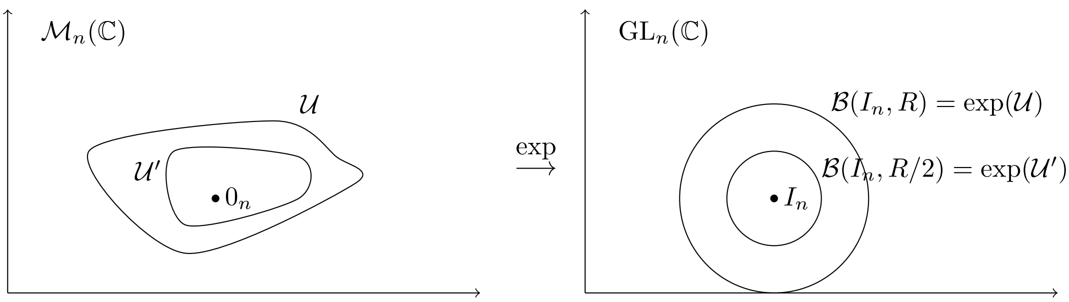
Si $B \in \mathrm{Im}(\exp)$, alors $B = M^2$, avec $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Par suite,

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = M^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ca + dc & cb + d^2 \end{pmatrix}$$

En particulier, cela implique $b(a + d) = 1$ donc que $a + d \neq 0$ et comme $c(a + d) = 0$, ceci implique nécessairement que $c = 0$.
Ainsi, sur la diagonale, on obtient $a^2 = -1$ et $d^2 = -1$ ... Absurde, puisque $a, d \in \mathbb{R}$!

Exercice : Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ n'admet pas de "sous-groupes arbitrairement petits" (*i.e.*) pour une norme $||.||$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et en notant $\mathcal{B}(I_n, R) := \{M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \mid ||M - I_n|| < R\}$ la boule ouverte de centre I_n et de rayon $R > 0$, montrer que le seul sous-groupe contenu dans $\mathcal{B}(I_n, R)$ est $\{I_n\}$.

Solution : Soit donc $\mathcal{B}(I_n, R)$ une boule ouverte de centre I_n et de rayon $R > 0$ et $\mathcal{U}$ un ouvert de 0_n dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que exp soit un difféomorphisme de $\mathcal{U}$ sur $\mathcal{B}(I_n, R)$.
On considère $\mathcal{U}'$ tel que $\mathcal{B}(I_n, R/2) = \exp(\mathcal{U}')$ ($\mathcal{B}(I_n, R/2)$ est encore un ouvert).



Soit G un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ inclus dans $\mathcal{B}(I_n, R/2)$, et soit $M \in G \backslash \{I_n\}$. On va montrer qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $M^p \notin \mathcal{B}(I_n, R/2)$ (et donc $M^p \notin G$).

Comme exp est un difféomorphisme de $\mathcal{U}$ sur $\mathcal{B}(I_n, R)$, c'est *a fortiori* un difféomorphisme de $\mathcal{U}'$ sur $\mathcal{B}(I_n, R/2)$. Donc il existe un unique $N \in \mathcal{U}'$ telle que $\exp(N) = M$.
De plus, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $pN \in \mathcal{U} \backslash \mathcal{U}'$. Par conséquent,

$$\underbrace{\exp(pN)}_{\in \mathcal{B}(I_n, R) \backslash \mathcal{B}(I_n, R/2)} = \exp(N)^p = M^p \quad \Rightarrow \quad M^p \notin \mathcal{B}(I_n, R/2) \quad \Rightarrow \quad M^p \notin G$$

Donc, pour $R > 0$ quelconque, la boule $\mathcal{B}(I_n, R)$ ne contient aucun sous-groupe non trivial (car pour dans un sous-groupe multiplicatif G, tout élément $M \in G$ vérifie $M^p \in G$, $\forall p \in \mathbb{N}$).