Théorème de Springer

1 Énoncé

Soit $\mathbf{K}$ un corps et $\mathbf{L}$ une extension de degré m impair sur $\mathbf{K}$.
Soit q une forme quadratique sur $\mathbf{K}^n$ et on note aussi q son prolongement naturel sur $\mathbf{L}^n$.
Si q possède un vecteur isotrope (un vecteur x non nul tel que $q(x) = 0$) dans $\mathbf{L}^n$, alors q possède un vecteur isotrope dans $\mathbf{K}^n$.

2 Démonstration

On procède par récurrence sur m. La propriété de récurrence correspond à l'énoncé. Pour $m = 1$ le résultat est clair. On fixe donc $m > 1$ impair, et on suppose la propriété vraie jusqu'au rang $m - 2$.
Soient $\mathbf{L}$ une extension de $\mathbf{K}$, q une forme quadratique sur $\mathbf{K}^n$ et $v \in \mathbf{L}^n$ un vecteur isotrope.

Première remarque : on a une tour d'extension : $\mathbf{L} = \mathbf{K}[\alpha_1, \ldots, \alpha_k]$ dont chaque étage est de degré impair (par multiplicativité des degrés). Si $k > 1$ il suffit de considérer un étage intermédiaire (on aura donc des extensions de degrés $< m$) et d'appliquer deux fois l'hypothèse de récurrence pour conclure.
Le seul cas non trivial est donc celui d'une extension monogène.

$$\boxed{\text{On supposera donc } \mathbf{L} = \mathbf{K}[\alpha].}$$

On considère $\mu \in \mathbf{K}[X]$ le polynôme minimal de α. Étudions $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbf{L}^n$ un vecteur isotrope dont a supposé l'existence.
$v_i \in \mathbf{K}[\alpha] = \mathbf{K} + \alpha\mathbf{K} + \cdots + \alpha^{m-1}\mathbf{K}$. Donc $v_i = g_i(\alpha)$ avec $g_i \in \mathbf{K}_{m-1}[X]$.

On a ainsi

$$q(g_1(\alpha), g_2(\alpha), \ldots, g_n(\alpha)) = 0 \in \mathbf{K}[\alpha] \cong \mathbf{K}[X]/(\mu).$$

Être nul dans l'ensemble quotient signifie que le reste de la division euclidienne du polynôme $q(g_1, \ldots, g_n)$ par μ est nul, donc :

$$\boxed{q(g_1, \ldots, g_n) = \mu h \text{ où } h \in \mathbf{K}[X]}.$$

On va montrer qu'on peut supposer les g_i premiers entre eux. Supposons qu'ils ne le soient pas et notons δ leur PGCD non trivial.
$\delta^2 q(g_1/\delta, \ldots, g_n/\delta) = \mu h$ puisque q est un polynôme homogène de degré 2.
μ ne divise pas δ pour raison de degré (car $\deg(\delta) < m$). $\delta^2 | \mu h$ donc par le théorème de Gauss (car μ est irréd, donc μ et δ sont premiers entre eux), $\delta^2 | h$, d'où $q(g_1/\delta, \ldots, g_n/\delta) = \mu\tilde{h}$ avec $\tilde{h} \in \mathbf{K}[X]$ et $deg(\tilde{h}) \leq deg(h) < m$. Et les g_i/δ sont premiers entre eux. En conclusion dans l'encadré ci-dessus, on peut supposer les g_i premiers entre eux.

On veut désormais raisonner sur le degré de h, donc on évacue tout d'abord le cas $h = 0$.

Si h est nul : Soit $x \in \mathbf{K}$. Alors il existe i tel que $g_i(x) \neq 0$, car sinon $X - x | g_j$ pour tout j, et les polynômes ne seraient pas premiers entre eux. Le vecteur $(g_1(x), \ldots, g_n(x)) \in \mathbf{K}^n$ est non nul et vérifie bien $q(g_1(x), \ldots, g_n(x)) = 0$.

On suppose donc $h \neq 0$.
On voit facilement avec l'égalité $q(g_1, \ldots, g_n) = \mu h$ que $\deg(h)$ est impair et inférieur strict à m. En effet q est un polynôme homogène de degré 2, donc $q(g_1, \ldots, g_n)$ est de degré pair ; de plus $deg(g_i) < m$ donc $deg(q(g_1, \ldots, g_n)) < 2m$.

Imparité de $deg(h)$: $\mathbf{K}[X]$ est factoriel, donc h admet une décomposition en produit de facteurs irréductibles. Parmi eux, il y a un forcément un polynôme de degré impair (si m était pair, on n'aurait pas semblable argument, puisque h pourrait être constant !). Notons-le h_0.

Soit $\mathbf{L}_0 = \mathbf{K}[X]/(h_0) \cong \mathbf{K}[\beta]$. ($\beta = \overline{X}$)

$deg(h_0) \leq deg(h) < m$: $[\mathbf{L}_0 : \mathbf{K}] < [\mathbf{L} : \mathbf{K}]$ et comme β annule h_0 :

$$\boxed{q(g_1(\beta), \ldots, g_n(\beta)) = 0}$$

Montrons maintenant que $(g_1(\beta), \ldots, g_n(\beta))$ n'est pas nul : $g_i(\beta) = 0\ \forall i \Rightarrow h_0 | g_i\ \forall i$ (le polynôme minimal divise les polynômes annulateurs). Mais les g_i sont premiers entre eux. Contradiction.

Le vecteur $(g_1(\beta), \ldots, g_n(\beta))$ est donc un nouveau vecteur isotrope, dans une extension de degré strictement inférieur à m et impaire (de degré $deg(h_0)$).
On peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence. On obtient ainsi l'existence d'un vecteur isotrope dans $\mathbf{K}^n$.

$\square$

3 Remarques

1) On a parlé de prolongement naturel dans l'énoncé. En effet, un polynôme homogène de degré 2 sur $\mathbf{K}$ est aussi un polynôme homogène de degré 2 sur $\mathbf{L}$.

2) Si l'extension est de degré pair, le résultat n'est plus vrai : $x^2 + y^2$ est anisotrope sur $\mathbf{R}$ mais pas sur $\mathbf{C}$ en prenant le vecteur $(1, i)$.

3) Sur un corps fini, en dimension ≥ 3 et caractéristique $\neq 2$, toutes les formes quadratiques sont isotropes. En effet en écrivant $q(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i^2$, on a $q(x) = 0 \Leftrightarrow a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 = -\sum_{i=3}^{n} a_i x_i^2$.
En posant $x_3 = 1$ et $x_i = 0$ pour $i > 3$, on obtient $a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 = -a_3$. Puis en comptant le nombre de carrés sur les corps finis, on voit que cette équation admet une solution - qui n'est pas nulle, ça se voit ! Le lecteur attentif aura remarqué qu'on a utilisé le lemme qui permet de classifier les formes quadratiques sur un corps fini.

En dimension 1, s'il existe un vecteur isotrope non nul, la forme est nulle.

En dimension 2, on distingue selon les deux classes d'équivalence :

- $q(x) = x^2 + y^2$. Il immédiat que la forme est isotrope ssi -1 est un carré ssi $q \equiv 1[4]$.

- $q(x) = x^2 + \alpha y^2$ avec α non carré. La forme est isotrope ssi $-\alpha$ est un carré.

Recasages : leçons 125, 141, 144, 151, 170.

Référence : *Carnet de voyage en Algébrie* Philippe Caldéro, Marie Peronnier.