

265 Exemples d'étude et d'application de fonctions usuelles et spéciales

I. Etude de fonctions usuelles

1. Exponentielle

Définition de l'exponentielle à partir de l'équation différentielle, équation fonctionnelle, quelques propriétés, définition de l'exponentielle de base a, développement de Taylor, développement en séries entières, application à la résolution d'équation différentielles du premier ordre

2. Fonctions trigonométriques

Dessin du cercle trigonométrique et définition de cosinus et sinus à avec l'angle, définition de tangente, mettre quelques propriétés, quelques formules de trigonométrie, les développements de Taylor, application : cos et sin donne un système de générateurs des solutions des équations différentielles linéaires à coefficients constants d'ordre 2.

3. Fonctions hyperboliques

Définition sh, ch et th, quelques proposition et formules de trigo

4. Fonctions réciproques

Définition arccos, arcsin, artan, argsh, argch, argth (bien mettre les domaines de définition), dérivée de arccsin

II. Intégrales eulériennes

1. Fonction Gamma

Définition, propriétés, équation fonctionnelle, remarque : généralisation de la factorielle, extension sur les complexes, **Formules des compléments**, application : détermination d'une formule du volume de la boule unité avec la formule de Stirling

2. Fonction Beta

Définition, propriétés + lien avec la fonction Gamma

III. Exemples d'utilisation

1. Exponentielle complexe

Définition + considération géométrique, question de **surjectivité $\exp : M_n(\mathbb{C}) \rightarrow GL_n(\mathbb{C})$ est surjective** ou **$\exp : S_n \rightarrow S_n^{++}$ est un homéomorphisme**

Application aux systèmes différentielles et stabilité des points critiques pour les équations autonomes

2. Probabilités

Définition de la loi normale, gaussienne

Transformée de Fourier → définition de la fonction caractéristique, application au théorème central limite, exemple d'application : Formule de Stirling avec les probabilités

Transformée de Laplace → **Inégalité de Hoeffding**

IV. Annexe

Représentation graphique des fonctions usuelles + schéma d'étude de fonctions

Références :

Colin, Fonctions usuelles

Groux, Fonctions spéciales

Gourdon, Analyse (équations différentielles)

Auliac Caby, Analyse pour le CAPES et l'agrégation interne

Caldero Germoni, Nouvelle histoires hédonistes de groupes et de géométrie (exponentielle matricielle)

Candelpergher, Calcul intégral (calcul du volume de la boule unité)

Barbe Ledoux, Probabilités

Rudin, Analyse réelle et complexe (exponentielle complexe)

Zavidovique (surjectivité de l'exponentielle matricielle complexe)

Bernis, 40 développements (Inégalité de Hoeffding)