Université de Lorraine **année 2019-2020**

Agrégation de Mathématiques

Méthode de Laplace

D'après Garet–Kurtzmann, *De l'intégration aux probabilités*, deuxième édition.

Théorème 1. *Soient g et h des fonctions mesurables de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que :*
- *h est strictement décroissante,*
- *on a en 0 : $h(x) = h(0) - cx^\beta + o(x^\beta)$ avec $c > 0$ et $\beta > 0$,*
- *on a en 0 : $g(x) \sim Ax^\alpha$ avec $\alpha > -1$ et $A \neq 0$,*
- *$\int_{\mathbb{R}_+} |g(x)|e^{h(x)}\, dx < +\infty$.*

Lorsque t tend vers l'infini, on a l'équivalent :

$$I(t) = \int_0^{+\infty} g(x)e^{th(x)}\, d\lambda(x) \sim Ae^{h(0)t}(ct)^{-\frac{\alpha+1}{\beta}} K_{\alpha,\beta},$$

avec $K_{\alpha,\beta} = \frac{1}{\beta}\Gamma(\frac{\alpha+1}{\beta})$.

Remarques
- On vérifie sans peine que le résultat est encore vrai si les intégrales et les fonctions ne sont pas définies sur $[0, +\infty[$, mais sur $[0, M[$ avec $0 < M < +\infty$.
- si h n'est pas décroissante, on peut souvent découper l'intégrales en petits morceaux de manière à s'y ramener (éventuellement modulo un changement de variable)

Étapes de la preuve

1. On commence par montrer que tout ce qui est important se passe autour de 0 : pour $\delta > 0$, on pose
$$I_\delta(t) = \int_{[0,\delta]} g(x)e^{th(x)}\, d\lambda(x) \text{ et } R_\delta(t) = \int_{[\delta,+\infty[} g(x)e^{th(x)}\, d\lambda(x).$$
et on montre que
$$\lim_{t\to+\infty} \frac{R_\delta(t)}{e^{h(0)t}t^{-\frac{\alpha+1}{\beta}}} = 0.$$
2. On exprime $\int_{[0,+\infty[} u^\alpha e^{-u^\beta}\, d\lambda(u)$ à l'aide de la fonction Γ.
3. Avec un changement de variable, on réécrit l'intégrale comme une intégrale à paramètre pour faire de la convergence dominée : pour $\delta > 0$, on pose $q_\delta(x) = \frac{g(x)}{Ax^\alpha}\mathbb{1}_{[0,\delta]}(x)$ et $r(x) = \frac{h(0)-h(x)}{cx^\beta}$; on a alors
$$\frac{I_\delta(t)}{Ae^{h(0)t}(ct)^{-\frac{\alpha+1}{\beta}}} = \int_{\mathbb{R}_+} q_\delta\left(\frac{u}{(ct)^{1/\beta}}\right) u^\alpha e^{-r\left(\frac{u}{(ct)^{1/\beta}}\right)u^\beta}\, d\lambda(u).$$

4. On conclut.

Démonstration. 1. Pour $x \geq \delta$ et $t > 1$, on a

ATTENTION : étape super pas naturelle ! À réviser !

$$th(x) = h(x) + (t-1)h(x) \leq h(x) + (t-1)h(\delta),$$

d'où

$$\begin{aligned} R_\delta(t) &= |\int_{\mathbb{R}_+} \mathbb{1}_{[\delta,+\infty]}(x) g(x) e^{th(x)} \ d\lambda(x)| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}_+} |g(x)| e^{h(x)+(t-1)h(\delta)} \ \ d\lambda(x)| \\ &\leq C e^{(t-1)h(\delta)} \text{ avec } C = \int_{\mathbb{R}_+} |g(x)| e^{h(x)} \ \ d\lambda(x)| \end{aligned}$$

On a donc $\frac{R_\delta(t)}{e^{h(0)t} t^{-\frac{\alpha+1}{\beta}}} \leq \frac{C}{e} e^{-(h(0)-h(\delta))t} t^{\frac{\alpha+1}{\beta}}$ qui tend vers 0 par croissance comparée des fonctions puissance et exponentielle.

2. Avec le changement $x = u^\beta$, on a

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_+} u^\alpha e^{-u^\beta} \ d\lambda(u) &= \frac{1}{\beta} \int_{\mathbb{R}_+} u^{\alpha-\beta+1} e^{-u^\beta} \beta u^{\beta-1} \ d\lambda(u) \\ &= \frac{1}{\beta} \int_{\mathbb{R}_+} (u^\beta)^{\frac{\alpha+1}{\beta}-1} e^{-u^\beta} \beta u^{\beta-1} \ d\lambda(u) \\ &= \frac{1}{\beta} \int_{\mathbb{R}_+} x^{\frac{\alpha+1}{\beta}-1} e^{-x} \ d\lambda(x) = \frac{1}{\beta} \Gamma(\frac{\alpha+1}{\beta}) = K_{\alpha,\beta}. \end{aligned}$$

3. Comme $\frac{g(x)}{Ax^\alpha}$ et $\frac{h(0)-h(x)}{cx^\beta}$ ont une limite 1 en 0, on a tout de suite l'existence de δ tel que $|q_\delta(x)| \leq 2$ et $r(x) \geq 1/2$ pour $x \in]0, \delta]$. On réécrit alors simplement

$$\begin{aligned} I_\delta(t) &= \int_{\mathbb{R}_+} \mathbb{1}_{[0,\delta]}(x) A x^\alpha \frac{g(x)}{Ax^\alpha} e^{t(h(0)-cx^\beta r(x))} \ d\lambda(x) \\ &= A e^{h(0)t} \int_{\mathbb{R}_+} x^\alpha q_\delta(x) e^{-ctx^\beta r(x)} \ d\lambda(x) \\ &= A e^{h(0)t} (ct)^{-\frac{\alpha+1}{\beta}} \int_{\mathbb{R}_+} q_\delta \left(\frac{u}{(ct)^{1/\beta}} \right) u^\alpha e^{-r\left(\frac{u}{(ct)^{1/\beta}}\right) u^\beta} \ \ d\lambda(u) \end{aligned}$$

avec le changement de variable affine $\frac{u}{(ct)^{1/\beta}} = x$, et donc

$$\frac{I_\delta(t)}{Ae^{h(0)t}(ct)^{-\frac{\alpha+1}{\beta}}} = \int_{\mathbb{R}_+} q_\delta \left(\frac{u}{(ct)^{1/\beta}} \right) u^\alpha e^{-r\left(\frac{u}{(ct)^{1/\beta}}\right) u^\beta} \ \ d\lambda(u).$$

4. On a

$$\left| q_\delta\left(\frac{u}{(ct)^{1/\beta}}\right) u^\alpha e^{-r\left(\frac{u}{(ct)^{1/\beta}}\right)u^\beta} \right| \leq 2u^\alpha e^{-u^\beta/2}$$

qui est intégrable. De plus, pour tout $u > 0$, on a

$$\lim_{t\to+\infty} q_\delta\left(\frac{u}{(ct)^{1/\beta}}\right) u^\alpha e^{-r\left(\frac{u}{(ct)^{1/\beta}}\right)u^\beta} = u^\alpha e^{-u^\beta},$$

et le théorème de convergence dominée nous donne

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{I_\delta(t)}{Ae^{h(0)t}(ct)^{-\frac{\alpha+1}{\beta}}} = K_{\alpha,\beta}.$$

Comme $I(t) = I_\delta(t) + R_\delta(t)$, cela donne le résultat voulu avec le premier point.

□

Remarque : il peut être plus malin de reporter tout à la fin le point 2. Si on n'a pas le temps de faire, ce n'est pas très grave, ce n'est pas le cœur de la preuve.