Confluence du lambda-calcul

Julien Devevey

2018-2019

Ref : Barendregt - The Lambda-Calculus p. 52

Définition 1. Soit R une relation binaire. On note $\to_R$ sa cloture compatible, puis $\twoheadrightarrow_R$ la cloture réflexive et transitive de $\to_R$ et enfin $=_R$ la relation d'équivalence engendrée par $\twoheadrightarrow_R$.
On définit de plus la relation $\beta = \{((\lambda x.M)N, M[x := N]), M, N \text{ des } \lambda\text{-termes}\}$.
Une relation binaire sur les λ-termes est appelée réduction.

Définition 2. Soit $\hookrightarrow$ une relation binaire. Alors $\hookrightarrow$ a la propriété du diamant si :

$$\forall M, M_1, M_2, [M \hookrightarrow M_1 \wedge M \hookrightarrow M_2 \Rightarrow \exists M_3[M_1 \hookrightarrow M_3 \wedge M_2 \hookrightarrow M_3]]$$

De plus, $\hookrightarrow$ a la propriété de Church-Rosser (aussi appelée confluence) si sa fermeture réflexive transitive a la propriété du diamant.

Lemme 3. (Admis) Si $\hookrightarrow$ a la propriété du diamant, elle a la propriété de Church-Rosser.

Définition 4. On pose la relation binaire $\twoheadrightarrow_1$ suivante sur les λ-termes :

$$\begin{aligned} M &\twoheadrightarrow_1 M \\ M \twoheadrightarrow_1 M' &\Rightarrow \lambda x.M \twoheadrightarrow_1 \lambda x.M' \\ M \twoheadrightarrow_1 M', N \twoheadrightarrow_1 N' &\Rightarrow MN \twoheadrightarrow_1 M'N' \\ M \twoheadrightarrow_1 M', N \twoheadrightarrow_1 N' &\Rightarrow (\lambda x.M)N \twoheadrightarrow_1 M'[x := N'] \end{aligned}$$

Lemme 5. $\twoheadrightarrow_1$ a la propriété du diamant.

Démonstration.
On commence par se donner M, M_1, M_2 tels que $M \twoheadrightarrow_1 M_1$ et $M \twoheadrightarrow_1 M_2$. On va alors raisonner par induction structurelle sur $M \twoheadrightarrow_1 M_1$.

1. Si M_1 est en fait M, on pose $M_3 = M_2$ et on a bien $M_1 \twoheadrightarrow_1 M_3$ ainsi que $M_2 \twoheadrightarrow_1 M_3$.
2. $M \twoheadrightarrow_1 M_1$ est en fait de la forme $(\lambda x.P)Q \twoheadrightarrow_1 P'[x := Q']$ et est une conséquence de $P \twoheadrightarrow_1 P', Q \twoheadrightarrow_1 Q'$. On peut alors distinguer deux sous-cas pour $M \twoheadrightarrow_1 M_2$:

   (a) M_2 est de la forme $P''[x := Q'']$ et $P \twoheadrightarrow_1 P''$ et $Q \twoheadrightarrow_1 Q''$. On peut alors conclure par récurrence en utilisant l'hypothèse de récurrence sur P, P', P'', Q, Q', Q''.
   (b) Sinon M_2 est de la forme $(\lambda x.P'')Q''$ avec $P \twoheadrightarrow_1 P''$ et $Q \twoheadrightarrow_1 Q''$. Dans ce cas aussi, l'hypothèse de récurrence s'applique et permet de conclure.
3. Si $M \twoheadrightarrow_1 M_1$ est de la forme $PQ \twoheadrightarrow_1 P'Q'$ avec $P \twoheadrightarrow_1 P'$, $Q \twoheadrightarrow_1 Q'$. On peut à nouveau distinguer deux cas pour M_2 :
   (a) M_2 est de la forme $P''Q''$ avec $P \twoheadrightarrow_1 P''$, $Q \twoheadrightarrow_1 Q''$. Il suffit ici encore de juste appliquer l'hypothèse de récurrence pour conclure.
   (b) Sinon M_2 est de la forme $P_1''[x := Q'']$ avec $P = (\lambda x.P_1)$ et $P_1 \twoheadrightarrow_1 P_1''$, $Q \twoheadrightarrow_1 Q''$. Ce qui signifie qu'on peut alors réécrire P' en $\lambda x.P_1'$ avec $P_1 \twoheadrightarrow_1 P_1'$. L'hypothèse de récurrence nous fournit P_1''' et Q''' tels que $Q' \twoheadrightarrow_1 Q'''$ et $Q'' \twoheadrightarrow_1 Q'''$, ainsi que $P_1' \twoheadrightarrow_1 P_1'''$ et $P_1'' \twoheadrightarrow_1 P_1'''$. On peut poser alors $M_3 = P_1'''[x := Q''']$. et M_1, M_2 s'y réduisent bien.
4. $M \twoheadrightarrow_1 M_1$ est $\lambda x.P \twoheadrightarrow_1 \lambda x.P'$ et est une conséquence directe de $P \twoheadrightarrow_1 P'$. Alors M_2 est de la forme $\lambda x.P''$. Par récurrence, on peut prendre un M_3 de la forme $\lambda x.P'''$ avec $P' \twoheadrightarrow_1 P'''$ et $P'' \twoheadrightarrow_1 P'''$.

□

Lemme 6. $\twoheadrightarrow_1$ admet pour fermeture transitive $\twoheadrightarrow_\beta$.

Démonstration.
Il suffit de remarquer que $\underset{=}{\longrightarrow}_\beta \subset \twoheadrightarrow_1 \subset \twoheadrightarrow_\beta$, où la première flèche est la fermeture réflexive de β. Et comme la fermeture transitive réflexive de β est $\twoheadrightarrow_\beta$, on obtient le résultat voulu. □

Théorème 7. La relation β a la propriété de Church-Rosser.

Démonstration.
La démonstration découle des différents lemmes précédents : on déduit des lemmes 4 et 5 que $\twoheadrightarrow_1$ a la propriété de Church-Rosser, c'est à dire par le lemme 6 que $\twoheadrightarrow_\beta$ a la propriété du diamant. □