La fonction d'Ackermann n'est pas primitive récursive

Julien Devevey

2018-2019

Ref : Dehornoy - Mathématiques pour l'informatique p. 190

Définition 1. On pose $A(n,m) = \begin{cases} m+1 & \text{si } n=0 \\ A(n-1,1) & \text{si } n>0 \text{ et } m=0 \\ A(n-1,A(n,m-1)) & \text{si } n>0 \text{ et } m>0 \end{cases}$

A est la fonction d'Ackermann.

Lemme 2. (admis) $A(1,m) = m+2$ et $A(2,m) = 2m+3$.

Lemme 3. On a les inégalités suivantes :

1. $A(n,m) > m$
2. Croissance stricte en m : $A(n,m+1) > A(n,m)$
3. Croissance en n : $A(n+1,m) \geq A(n,m)$
4. Croissance jointe : $A(n+1,m) \geq A(n,m+1)$
5. Majoration de la composition : $A(k,A(n,m)) \leq A(2+\max(k,n),m)$

Pour tout $n,m \in \mathbb{N}$.

Démonstration.

Commençons par les deux premiers points, qu'on montre par récurrence sur n. Pour $n=0$, $A(n,m) = m+1$, et on a les deux premiers points. Soit maintenant $n \in \mathbb{N}$ et supposons les deux premiers points vrais au rang n. Alors $A(n+1,0) = A(n,1) > 1 > 0$ et $A(n+1,m+1) = A(n,A(n+1,m)) > A(n+1,m)$ d'après les hypothèses de récurrence. De plus, une récurrence immédiate sur m donne $A(n+1,m) > m$. On a donc prouvé les deux premiers points.

La troisième inégalité se montre directement à partir des deux précédentes : $A(n+1,0) = A(n,1) > A(n,0)$ et $A(n+1,m+1) = A(n,A(n+1,m))$. Or on a $A(n+1,m) \geq m+1$, d'où par croissance en m, $A(n+1,m+1) \geq A(n,m+1)$.

Soit $n \geq 1$ fixé. On va montrer le quatrième point par récurrence sur m. $A(n,0) = A(n-1,1)$: c'est bon. Soit maintenant $m \geq 0$ et regardons $A(n,m+1) = A(n-1,A(n,m)) \geq A(n-1,A(n-1,m+1)) \geq A(n-1,m+2)$ car $A(n-1,m+1) \geq m+2$ et par croissance en m.

Enfin, posons $s = \max(k, n)$. On a $A(k, A(n, m)) \leq A(s, A(s+1, m)) = A(s+1, m+1) \leq A(s+2, m)$. □

Lemme 4. Soit $f(x_1, \ldots, x_k)$ primitive récursive. Alors il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $f(x_1, \ldots, x_k) \leq A(n, \sum_{i=1}^{k} x_i)$.

Démonstration.

On va procéder par induction structurelle sur la classe des fonctions primitives récursives.

— C'est clairement vrai pour la fonction nulle

— La fonction successeur est $m \mapsto A(0, m)$, c'est aussi bon

— Pour les projections, $n = 0$ convient aussi

— Considérons $f, g_1, \ldots, g_r$ pour le schéma de composition. On associe à chaque fonction un entier $n, k_1, \ldots, k_r$ et on pose $s = \max(n, k_1, \ldots, k_r, 2)$. Alors avec $X = (x_1, \ldots, x_k)$ et S leur somme on a : $f(g_1, \ldots, g_r)(X) \leq A(n, r \times A(s, S)) \leq A(s, A(2, A(2, \ldots, A(s, S)))) \leq A(s + 2r, S)$.

— On considère maintenant le schéma de récurrence. On pose pour ça $f(0, X) = g(X)$ et $f(y+1, X) = h(f(y, X), X)$, n, j sont les entiers associés à g et h. On pose alors $m = \max(n, j+5)$. On a donc bien $f(0, X) \leq A(n, S) \leq A(m, S)$. Supposons maintenant que $f(y, X) \leq A(m, y+S)$. Alors on peut effectuer le calcul suivant :

$$f(y+1, X) \leq A(j, y + S + A(m, y+S)) \leq A(j, A(2, A(m, y+S)))$$

Et enfin :

$$f(y+1, X) \leq A(j+4, A(m, y+S)) \leq A(m-1, A(m, y+S)) \leq A(m, y+1+S)$$

□

Théorème 5. La fonction d'Ackermann n'est pas primitive récursive.

Démonstration.

Si A l'était, on pose $\phi(n) = A(n, n+1)$. Alors, il existe k tel que $\phi(n) \leq A(k, n), \forall n \in \mathbb{N}$. On aurait alors $\phi(k) = A(k, k+1) \leq A(k, k)$, ce qui contredit une des inégalités du lemme 3. Donc A n'est pas primitive récursive. □