On peut alors noter $\sigma' : \underbrace{x = x_0 < x_1 < \dots < x_p = y}_{\sigma_1 \in \mathrm{sub}[x,y]} = \underbrace{y_0 < \dots < y_q = z}_{\sigma_2 \in \mathrm{sub}[y,z]}$.

Nous en déduisons que $\mathrm{Var}_\sigma(f) \leq \mathrm{Var}_{\sigma'}(f) = \mathrm{Var}_{\sigma_1}(f) + \mathrm{Var}_{\sigma_2}(f) \leq V_x^y f + V_y^z f$.

Ainsi, en passant au sup, $V_x^z f \leq V_x^y f + V_y^z f$, d'où finalement l'égalité.

D/ • Toute fonction croissante est à variations bornées : si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ croît,

donc pour $\sigma : x_0 = a < \dots < x_n = b$, on a $\mathrm{Var}_\sigma(f) = \sum_{i=0}^{n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+1}) - f(x_i)$
$= f(b) - f(a)$.

Donc $V_a^b f = f(b) - f(a)$ dans ce cas.

Comme « être à variations bornées » est stable par combinaison linéaire (facile), toute différence de deux fonctions croissantes est à variations bornées.

• Réciproquement, soit f à variations bornées et $g : \begin{array}{l}[a,b] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto V_a^x f\end{array}$. Par Chasles, g est croissante. Soit $h := g - f$. Alors h croît car si $a \leq x < y \leq b$,

$h(y) - h(x) = V_x^y f - (f(y) - f(x)) \geq 0$ car $\sigma : x < y \in \mathrm{sub}[x,y]$
par def de $V_x^y f$.

Donc $f = g - h$ convient.

Rq : Ainsi l'espace des fonctions à variations bornées est le vect des fonctions monotones.

NB : Si f est C^1 alors $V_a^b f = \int_a^b |f'(t)| dt$ est à variations bornées.

NB : $f : \begin{array}{l}[0,1] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \cos\left(\frac{1}{x}\right) x\end{array}$
$f(0) = 0$. Continue mais pas à variations bornées.
$\sigma^N : 0 < \frac{1}{N\pi} < \frac{1}{(N-1)\pi} < \dots < \frac{1}{2\pi} < \frac{1}{\pi} < 1$.

D/ • Pour $x_k < x_{k+1}$ on a $|f(x_{k+1}) - f(x_k)| = \left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} f'(t) dt \right| \leq \int_{x_k}^{x_{k+1}} |f'(t)| dt$

Donc pour tout $\sigma \in \mathrm{sub}[a,b]$, $\mathrm{Var}_\sigma(f) \leq \int_a^b |f'(t)| dt \leq (b-a) \sup |f'| < +\infty$.

Donc $V_a^b f < +\infty$: f est à variations bornées, et $V_a^b f \leq \int_a^b |f'|$.

• Pour $N \geq 2$, on pose $x_i^N := a + \frac{i}{N}(b-a)$, $0 \leq i \leq N$ et σ^N la subdivision associée.

Par le TAF, il existe $\theta_i^N \in]x_i^N, x_{i+1}^N[$ tel que $f(x_{i+1}^N) - f(x_i^N) = \frac{b-a}{N} f'(\theta_i^N)$.

Donc $\mathrm{Var}_{\sigma^N}(f) = \frac{b-a}{N} \sum_{i=0}^{N-1} |f'(\theta_i^N)|$. Somme de Riemann : $\mathrm{Var}_{\sigma^N}(f) \xrightarrow[N \to +\infty]{} \int_a^b |f'(t)| dt$.

Donc $\int_a^b |f'| \leq V_a^b f$.

Goundon

Étude des fonctions à variations bornées

DEV

Énoncé : Une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est à variations bornées si et seulement si elle est la différence de deux fonctions croissantes sur $[a,b]$.

Si σ est une subdivision de $[a,b]$ ($\sigma : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$), on définit $\mathrm{Var}_\sigma(f) := \sum_{i=0}^{n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)|$. On note $\mathrm{sub}[a,b]$ l'ensemble des subdivisions du segment $[a,b]$. On dit que f est à variations bornées si $V_a^b f := \sup_{\sigma \in \mathrm{sub}[a,b]} \mathrm{Var}_\sigma(f) < +\infty$.

Lemme 1 : Si $[c,d] \subset [a,b]$ alors $f_{|[c,d]}$ est à variations bornées. On peut donc définir la quantité $V_c^d f := V_c^d f_{|[c,d]}$.

$\mathcal{D}$] Soit $\sigma : c = x_0 < \dots < x_n = d$ une subdivision de $[c,d]$. Alors $\sigma' : a \leq x_0 < \dots < x_n \leq b$ est une subdivision de $[a,b]$, et donc

$$\mathrm{Var}_\sigma(f_{|[c,d]}) \leq \mathrm{Var}_{\sigma'}(f) \leq V_a^b f.$$

En prenant le supremum, on en déduit que $f_{|[c,d]}$ est à variations bornées. $\blacksquare$

Lemme 2 : (Chasles) Si $a \leq x < y < z \leq b$, on a $V_x^y f + V_y^z f = V_x^z f$.

$\mathcal{D}$] • Soit $\sigma_1 : x = x_0 < \dots < x_p = y \in \mathrm{sub}[x,y]$

$\sigma_2 : y_0 = y < \dots < y_q = z \in \mathrm{sub}[y,z]$ deux subdivisions.

Alors la concaténation $\sigma : x_0 < \dots < x_p = y_0 < \dots < y_q$ est une subdivision de $[x,z]$ donc $\mathrm{Var}_{\sigma_1}(f) + \mathrm{Var}_{\sigma_2}(f) = \mathrm{Var}_\sigma(f) \leq V_x^z f$. Comme σ_1, σ_2 étaient choisies quelconques, on a $V_x^y f + V_y^z f \leq V_x^z f$ en passant au sup.

• Soit maintenant $\sigma \in \mathrm{sub}[x,z]$. Si on ajoute y à σ (au cas où y n'y était pas), on obtient une subdivision σ', et l'inégalité triangulaire $|f(x_k) - f(x_{k+1})| \leq |f(x_k) - f(y)| + |f(y) - f(x_{k+1})|$ montre que $\mathrm{Var}_\sigma(f) \leq \mathrm{Var}_{\sigma'}(f)$.