

Problème du voyageur de commerce et cas euclidien

Julien Devevey

2018-2019

Ref : Cormen - Introduction to Algorithms p.1096 et 1112

Définition 1. Soit $G = (V, E)$ un graphe complet et $c : E \rightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction de valuation des arêtes telle que $c(x, x) = 0, \forall x \in V$ et $k \in \mathbb{N}$. Le problème du voyageur de commerce est de savoir s'il existe un chemin qui passe par tous les sommets du graphe une unique fois de coût total inférieur ou égal à k . On le note TSP (pour Traveling Salesman Problem).

Proposition 2. TSP est NP-Complet.

Démonstration.

Etant donné une instance du problème, on utilise comme certificat la suite des n sommets formant le cycle. Alors on vérifie linéairement que le coût de ce cycle (la somme du coût de chacune des arêtes le composant) est bien inférieure à k . Donc le problème est dans NP.

On va ensuite réduire HAM-CYCLE à TSP, car on sait que HAM-CYCLE est NP-complet. Soit alors $G = (V, E)$ une instance de HAM-CYCLE. On construit alors une instance de TSP en posant :

$$\begin{aligned} c(i, j) &= 0 \text{ si } (i, j) \in E \\ &= 1 \text{ sinon} \end{aligned}$$

L'instance de TSP est alors $(G, c, 0)$: en effet, s'il y a un cycle hamiltonien dans G , ce cycle correspond bien à un cycle de coût 0 pour TSP. Et si TSP admet un cycle de coût nul, c'est un cycle hamiltonien. $\square$

Théorème 3. On peut rajouter une hypothèse sur c qui est $\forall (i, j, k) \in V^3, c(i, j) \leq c(i, k) + c(k, j)$, c'est à dire l'inégalité triangulaire. Dans ce cas, il existe une 2-approximation au problème du voyageur de commerce.

Algorithme 4. L'algorithme suivant est une telle 2-approximation :

Algorithm 1 Approx-TSP

Entrée: $G = (V, E)$, c **Sortie:** Un cycle hamiltonien H

- 1: choisir un sommet r de V
 - 2: calculer un arbre couvrant minimal T ayant r pour racine
 - 3: $H \leftarrow$ la liste des sommets dans l'ordre dans lequel ils sont visités dans un parcours en profondeur de T
 - 4: **return** H
-

Démonstration du théorème.

L'algorithme 4 peut être implémenté en utilisant l'algorithme de Prim, ce qui permet de donner une complexité de l'ordre de $O(|V|^2)$: l'algorithme est polynomial.

Soit H^* un cycle optimal. Si on supprime une de ses arêtes, comme il passe une et une seule fois par chaque sommet, on obtient un arbre couvrant, et chaque arête a un coût positif. Ainsi, l'arbre couvrant minimal calculé ligne 2 a un coût plus faible que celui d'un cycle optimal : $c(T) \leq c(H^*)$. Or dans un parcours en profondeur P de T , on passe par chaque arête de l'arbre au plus deux fois, ce qui donne l'inégalité $c(P) \leq 2c(T)$. Mais le parcours en profondeur n'est pas en général un cycle hamiltonien, d'où la sélection que l'on fait quand on choisit de ne retenir chaque sommet que la première fois qu'on le visite, ce qui donne le cycle hamiltonien H (comme le graphe est complet, la donnée des n sommets dans un certain ordre définit toujours un cycle hamiltonien).

On fait ensuite intervenir ici l'inégalité triangulaire pour dire que le fait d'avoir supprimé des sommets n'augmente pas le coût du parcours : en effet, si P contient le chemin $(s_i, \dots, s_{i+k})$ et qu'il ne reste plus que (s_i, s_{i+k}) dans H , on a bien $c(s_i, s_{i+k}) \leq \sum_{j=1}^k c(s_{i+j-1}, s_{i+j})$ par inégalité triangulaire.

Au final, avec toutes les inégalités qu'on a trouvées, on peut écrire que $c(H) \leq 2c(H^*)$, c'est à dire qu'on a bien une 2-approximation. $\square$

Remarque 5. Dans le cas où $P \neq NP$, on a que pour toute constante ρ , il n'existe pas de ρ -approximation qui soit polynomiale pour le problème du voyageur de commerce.

En pratique, le cas euclidien est celui qu'on rencontre le plus souvent. De plus, il existe de meilleurs algorithmes que celui présenté ici (par exemple une 3/2-approximation).