

Liapounov

jojolafleurebleue

14/05

1 Théorème de Liapounov

Référence : [rouviere]

Recasages. 215-220-221

On considère le système différentiel

$$y' = f(y), \quad y(0) = x \quad (1)$$

où $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est de classe C^1 et $f(0) = 0$. Si la matrice $D_f(0)$ a toutes ses vp de partie réelle strictement négative, l'origine est un point d'équilibre attractif du système différentiel : pour x assez voisin de 0, la solution $y(t)$ tend exponentiellement vers 0 quand $t \rightarrow \infty$.

Remarque 1. L'idée est de linéariser localement le système grâce à la formule de Taylor, puis de voir grâce à une norme auxiliaire que sous nos hypothèses, le comportement des solutions en $+\infty$ se transmet du système linéaire au système tout court. On dispose d'un résultat global pour le système linéarisé, qui se transmettra en un résultat local sur le système de départ. On utilisera pour cela la norme induite par la forme bilinéaire de Liapounov (sur $\mathbb{R}^n$) donnée par

$$b(x, y) = \int_0^\infty (e^{tA}x, e^{tA}y)dt \quad (2)$$

On exploitera les propriétés de cette norme, et l'équivalence de toutes les normes en dimension finie.

Démonstration. 1.1 Étude du système linéarisé

On note $A = D_f(0)$, et on considère le système

$$y' = Ay \quad y(0) = x \quad (3)$$

L'unique solution globale est $t \rightarrow e^{tA}x$. Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ les valeurs propres distinctes de A . Par le lemme des noyaux on peut écrire

$$\mathbb{C}^n = \oplus_{1 \leq j \leq k} E_j \quad (4)$$

Où E_j est l'espace caractéristique de A associé à la valeur propre λ_j . On peut donc écrire $x = x_1 + \dots + x_k$ dans cette somme directe et on a pour tout $j \in \{1, \dots, k\}$

$$e^{tA}x_j = e^{t\lambda_j} e^{t(A-\lambda_j I)}x_j = e^{t\lambda_j} \left(\sum_{0 \leq p < m_j} \frac{t^p}{p!} (A - \lambda_j I)^p \right) x_j \quad (5)$$

On trouve, en sortant une constante correspondant au max des normes d'opérateurs, en utilisant le binôme de Newton et en majorant $\frac{1}{p!}$ par $\binom{p}{k}$

$$\|e^{tA}x_j\| \leq e^{t\operatorname{Re}(\lambda_j)} C_j (1 + |t|)^{m_j-1} \|x_j\| \leq C e^{t\operatorname{Re}(\lambda_j)} (1 + |t|)^{n-1} \|x_j\| \quad (6)$$

où C_j et C sont des constantes positives. Et donc

$$\begin{aligned}\|e^{tA}x\| &\leq \sum_{j=1}^k \|e^{tA}x_j\| \\ &\leq C(1+|t|)^{n-1} \left(\sum_{j=1}^k e^{t\operatorname{Re}(\lambda_j)} \right) \max_j \|x_j\|\end{aligned}\tag{7}$$

Grâce à l'équivalence des normes il existe un polynôme P tel que

$$\|e^{tA}x\| \leq P(|t|) \left(\sum_{j=1}^k e^{t\operatorname{Re}(\lambda_j)} \right) \|x\|\tag{8}$$

De plus par hypothèse $\exists a > 0$ tel que pour $j = 1, \dots, k$ $\operatorname{Re}(\lambda_j) < -a$, comme les $P(|t|)e^{t\operatorname{Re}(\lambda_j)}e^{at}$ sont bornés (tendent vers 0 à $\pm\infty$ et sont continus) il existe une constante C' telle que

$$\|z(t)\| \leq C'e^{-at}\|x\|\tag{9}$$

0 est un point d'équilibre attractif du système.

1.2 Preuve du théorème

On introduit la fonction de Liapounov sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$

$$b(x, y) = \int_0^\infty (e^{tA}x; e^{tA}y)dt\tag{10}$$

Où $(;)$ est le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^n$. Remarquons que l'intégrale est absolument convergente par l'inégalité de Cauchy-Schwartz, en utilisant ce qui a été précédemment démontré. On définit donc bien là une forme bilinéaire, on voit facilement qu'elle est symétrique, de plus

$$q(x) := b(x, x) = \int_0^\infty \|e^{tA}x\|^2 dt\tag{11}$$

est bien définie positive. Donc $\sqrt{q(\cdot)}$ définit bien une norme, que l'on va utiliser dans la suite. Soit (y, I) une solution maximale du problème de Cauchy, on notera $T^* = \sup I$ le temps maximal d'existence de y . Pour arriver à une égalité type $q(y(t)) \leq e^{-\beta t} q(x)$ on va résoudre une inéquation différentielle, on s'intéresse donc à :

$$q(y)' = D_q(y)y' = 2b(y, y') = 2b(y, Ay) + 2b(y, r(y))\tag{12}$$

Où $r(y)$ est le $o(y)$ qui apparaît dans le DL à l'ordre 1 de f en 0.

Fixons $\epsilon > 0$. On va étudier chaque terme.

On a d'une part

$$\begin{aligned}2b(x, Ax) &= \int_0^\infty 2(e^{tA}x; e^{tA}Ax)dt \\ &= \|e^{tA}x\|^2|_0^\infty \\ &= -\|x\|^2\end{aligned}\tag{13}$$

Par équivalence des normes il existe $C > 0$ tel que $Cq(y) \leq \|y\|^2$.

Par l'inégalité de CS

$$|b(y, r(y))| \leq \sqrt{q(y)}\sqrt{q(r(y))}\tag{14}$$

Comme $r(y) = o(y)$ lorsque $y \rightarrow 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que $q(y) < \alpha$ implique $\sqrt{q(r(y))} \leq \epsilon\sqrt{q(y)}$ et donc

$$2b(y, r(y)) \leq 2\epsilon q(y)\tag{15}$$

Il vient en combinant ces deux résultats

$$q(y)' \leq -\beta q(y) \quad (16)$$

pour $q(y) \leq \alpha$ où $\beta = C - 2\epsilon$, pas de dépendance entre ϵ et C donc prendre ϵ tel que $C - 2\epsilon > 0$.

Notons $J = \{T \in (0, T^*) \text{ tel que } q(y(t)) < \alpha \forall t \in [0, T]\}$. J est non vide par continuité, on notera $T_1 = \sup J$. Soit $T \in J$ alors $\forall t \in [0, T]$ on a :

$$(e^{\beta t} q(y(t)))' \leq 0 \quad (17)$$

On suppose désormais que $q(x) < \alpha$, on a donc pour un tel t :

$$q(y(t)) \leq e^{-\beta t} q(x) \quad (18)$$

Il nous reste à montrer que $T^* = T_1$, i.e que si la condition $q(x) < \alpha$ est vérifiée alors $q(y(t)) < \alpha$ à chaque instant. Supposons donc, par l'absurde que $T_1 < T^*$. Par continuité $\exists T_2 > T_1$ tel que $q(y) < \alpha$ sur $[T_1, T_2]$. Et donc par ce qui précède on a pour $t \in [T_1, T_2]$

$$q(y(t)) \leq e^{-\beta t} \alpha < \alpha \quad (19)$$

Ce qui est une contradiction avec la maximalité de T_1 . On en déduit que $T_1 = T^*$. Et donc à chaque instant t d'existence de y on a :

$$q(y(t)) \leq e^{-\beta t} q(x) \quad (20)$$

La solution est donc bornée et par le théorème des bouts elle est globale. Et cette inégalité montre que 0 est bien un point d'équilibre attractif du système. □

Remarque 2. Le développement est long en l'état. On peut mettre la première partie algèbre linéaire dans le plan, et expliquer soigneusement la suite en 15 minutes, ça fait largement un développement.