

Analyse en moyenne du Tri Rapide

Julien Devevey

2018-2019

Ref : Beauquier, Berstel, Chrétienne - Eléments d'algorithmique p.126
Cormen - Introduction to Algorithms p.145

Algo 1. Algorithme du Tri Rapide déterministe

Algorithm 1 Tri_rapide

Entrée: T, i, j

```
1: si  $i < j$  alors  
2:    $k \leftarrow \text{Pivoter}(T, i, j)$   
3:   Tri_Rapide( $T, i, k - 1$ )  
4:   Tri_Rapide( $T, k + 1, j$ )  
5: fin si
```

Algorithm 2 Pivoter

Entrée: T, i, j

Sortie: s

```
1:  $r \leftarrow T[j], s \leftarrow i - 1$   
2: pour  $t \leftarrow i$  à  $j - 1$  faire  
3:   si  $T[t] \leq r$  alors  
4:      $s \leftarrow s + 1$   
5:   Echanger  $T[s]$  et  $T[t]$   
6:   fin si  
7: fin pour  
8: Echanger  $T[i]$  et  $T[t]$ 
```

Lemme 2. L'algorithme de pivotage effectue $\Theta(n)$ comparaisons d'éléments du tableau, où n est la longueur du tableau.

Démonstration.

On effectue un nombre constant d'opération par itération, et la boucle s'itère n fois. $\square$

Définition 3. On pose $S_k^l = \{T, \text{taille de } T = k - l + 1 \text{ et } \forall i, j \in \llbracket 1, k -$

$l+1\llbracket, T[i] \in \llbracket l, k \rrbracket$ et $(i \neq j \Rightarrow T[i] \neq T[j])$. C'est donc l'ensemble des tableaux à $k-l+1$ éléments à valeurs dans $\llbracket l, k \rrbracket$ dont les éléments sont distincts deux à deux, il est donc isomorphe aux bijections de $\llbracket l, k \rrbracket$.

Lemme 4. Soit X_n une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur S_1^n . On conditionne la valeur du pivot de cette manière : $r = X_n[n]$. Alors en décomposant $\text{Pivoter}(X_n, 1, n) = G_r[r]D_r$ en la concaténation de trois sous-tableaux, on a que G_r suit la loi uniforme sur S_1^{r-1} et D_r suit la loi uniforme sur S_{r+1}^n .

Démonstration.

On commence par remarquer que les éléments de S_l^k peuvent s'identifier aux permutations de $\llbracket l, k \rrbracket$, en posant la bijection $T \mapsto \sigma$ où $\sigma(i) = T[i-l+1]$ et on confondra pour le reste de la preuve tableau et permutation. Soit alors un r fixé qui correspond au rang du tableau, et toutes les probabilités dans la suite sont conditionnées à l'évènement ' $X_n[n] = r$ '. On note alors $\pi = \pi_1 \circ \pi_2$, l'élément de $\mathfrak{S}_n$ obtenu après l'appel à Pivoter , qu'on peut donc décomposer en $\pi_1 \in \mathfrak{S}(\llbracket 1, r-1 \rrbracket)$ et $\pi_2 \in \mathfrak{S}(\llbracket r+1, n \rrbracket)$ (les permutations des tableaux de gauche et de droite qu'il reste à trier). On cherche alors à dénombrer le nombre de permutations qui peuvent donner π après appel à Pivoter . Si on montre que ce nombre est indépendant de π on aura le résultat souhaité, comme la probabilité d'avoir π , sachant que X_n suit la loi uniforme sur S_1^n , est donné par la formule $\frac{k}{l}$ où k est le nombre de permutations dont le pivot est r donnant π après pivotage, et l le nombre total de permutations dont le pivot est r .

Pour ça, on doit transformer les opérations effectuées sur le tableau par Pivoter en opération sur des permutations. Echanger deux éléments d'un tableau revient à composer sa permutation à droite par la transposition des deux indices. Alors, on a l'équivalence suivante :

$$\text{Pivoter}(\pi') = \pi \iff \exists 1 \leq s_1 < s_2 < \dots < s_{r-1} \leq n, \pi = \pi' \circ \tau_1 \circ \tau_2 \circ \dots \circ \tau_{r-1} \circ \tau$$

Où l'on a posé $\tau = (n \ r)$ et $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \tau_i = (i \ s_i)$. L'idée est de rendre compte des $r-1$ échanges qui ont lieu pendant la boucle de pivotage, puis de la transposition finale où on place le pivot à sa place dans le tableau. Les s_i correspondent alors aux j où $T[j] < r$.

Si on montre que $\text{Card}\{\pi', \text{Pivoter}(\pi') = \pi\} = \text{Card}\{(s_1, s_2, \dots, s_{r-1}), 1 \leq s_1 < s_2 < \dots < s_{r-1} \leq n\}$, on montre le résultat souhaité comme la partie droite ne dépend plus de π . Pour ça, on montre que $f : (s_1, s_2, \dots, s_{r-1}) \mapsto \pi \circ \tau \circ \tau_{r-1} \circ \dots \circ \tau_2 \circ \tau_1$ est une bijection entre les deux ensembles.

C'est bien une surjection, car d'après l'équivalence précédente, on a que toute permutation qui donne π par pivotage est bien décomposable comme image d'un élément par f .

Montrons que c'est une injection. Pour ça, soit $s = (s_1, s_2, \dots, s_{r-1}), t = (t_1, t_2, \dots, t_{r-1}), f(s) = f(t)$. On pose alors $\sigma_i = (i \ s_i)$ et $\tau_i = (i \ t_i)$. Soit alors $j = \min\{i, s_i \neq t_i\}$. j existe si l'ensemble est non vide. Si j existe, on a alors l'égalité $\tau_j \circ \tau_{j+1} \circ \dots \circ \tau_{r-1} = \sigma_j \circ \sigma_{j+1} \circ \dots \circ \sigma_{r-1}$. Or, on remarque aussi que

$\forall i > j, s_i \geq i > j$ et $t_i \geq i > j$ donc j est un point fixe de σ_i et τ_i . On a alors :

$$\tau_j \circ \tau_{j+1} \circ \dots \circ \tau_{r-1}(j) = \sigma_j \circ \sigma_{j+1} \circ \dots \circ \sigma_{r-1}(j)$$

$$\tau_j(j) = \sigma_j(j)$$

C'est à dire que $s_j = t_j$, ce qui contredit la définition de j . Alors j n'existe pas et $s = t$. On a donc que f est une bijection et que les deux ensembles ont même cardinal.

Alors les sous-tableaux de gauche et de droite suivent tous deux une loi uniforme. $\square$

Théorème 5. La complexité en moyenne du tri rapide dont l'entrée est une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur S_1^n est $O(n \log(n))$.

Démonstration.

Le lemme précédent permet de calculer la complexité de manière récursive. On a alors, en notant M_n l'espérance de la complexité d'un appel sur un tableau de S_1^n tiré uniformément aléatoirement :

$$M_n = \sum_{r=1}^n \frac{1}{n} (\Theta(n) + 1 + M_{r-1} + M_{n-r})$$

Remarquons qu'en changeant d'indice, avec $M_0 = M_1 = 0$ on a $\sum_{r=1}^n M_r = \sum_{r=1}^n M_{n-r} = \sum_{r=1}^{n-1} M_{r-1}$. D'où : $M_n = \Theta(n) + \frac{2}{n} \sum_{r=1}^{n-1} M_r$. Il est alors possible de montrer que $M_n = \Theta(n \log(n))$. $\square$

Remarque 6. On a supposé ici que les tableaux sont des permutations de $\llbracket 1, n \rrbracket$ car tant que les éléments du tableau sont différents deux à deux, il existe une bijection naturelle entre l'ensemble des éléments du tableau et $\mathbb{N}$.