

Théorie des Matroïdes et un exemple

Julien Devevey

2018-2019

Ref : Benoit - A guide to Algorithm Design p.61

Définition 1. Soient S un ensemble fini et $\mathcal{I} \subset \mathcal{P}(S)$. Si :

1. $X \in \mathcal{I} \Rightarrow (\forall Y \subset X, Y \in \mathcal{I})$ (propriété d'hérédité)
2. $(A, B \in \mathcal{I}, |A| < |B|) \Rightarrow \exists x \in B \setminus A, A \cup \{x\} \in \mathcal{I}$ (propriété d'échange)

$(S, \mathcal{I})$ est appelée matroïde. Les éléments de $\mathcal{I}$ sont appelés éléments indépendants. Soient $F \in \mathcal{I}$ et $x \notin F$. $F \cup \{x\}$ est une extension de F si $F \cup \{x\} \in \mathcal{I}$. F est dit maximal si F n'admet pas d'extension.

Lemme 2. Tous les ensembles indépendants maximaux sont de même cardinal.

Démonstration.

Supposons que le lemme ne soit pas vrai : Soient $A, B \in \mathcal{I}, |A| < |B|$ et A et B maximaux. Alors par propriété d'échange, $\exists x \in B \setminus A, A \cup \{x\} \in \mathcal{I}$, ce qui contredit le fait que A soit maximal. $\square$

Définition 3. Soit $w : S \mapsto \mathbb{N}$, une fonction de poids. Le poids d'un élément indépendant $A \in \mathcal{I}$ est alors $\sum_{x \in A} w(x)$. Le problème d'optimisation qu'on cherche à résoudre est le suivant :

Etant donné $(S, \mathcal{I})$ un matroïde et w une fonction de poids, trouver un élément indépendant de poids maximal.

Théorème 4. L'algorithme suivant renvoie une solution optimale au problème.

Entrée: Un matroïde $(S, \mathcal{I})$

Sortie: Un élément indépendant de poids maximal

- 1: Trier les éléments de $S = \{s_1, \dots, s_n\}$ par poids décroissant : $w(s_1) \geq w(s_2) \geq \dots \geq w(s_n)$.
- 2: $A \leftarrow \emptyset$
- 3: **pour** $i = 1$ à n **faire**
- 4: **si** $A \cup \{s_i\} \in \mathcal{I}$ **alors**
- 5: $A \leftarrow A \cup \{s_i\}$
- 6: **fin si**
- 7: **fin pour**

Démonstration.

On va procéder par récurrence en posant un invariant de boucle, on pose alors (H) “Il existe une solution optimale qui contient A .”

Avant de rentrer dans la boucle, (H) est bien vraie, car $A = \emptyset$, donc toute solution optimale contient A .

Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Supposons qu’on a déjà effectué $k - 1$ tours de boucle et que (H) est vérifiée. Soit alors s_k l’élément de S qu’on considère au début du k ème tour. Soit $A \cup \{s_k\} \notin \mathcal{I}$ et alors A n’est pas modifié et donc (H) est toujours vraie à la fin de la k ème itération. Sinon, on montre qu’il existe une solution optimale contenant $A \cup \{s_k\}$. Soit pour ça B une solution optimale qui contient A . Si B contient s_k , on a prouvé le résultat souhaité. Sinon, comme $B \in \mathcal{I}$, on peut utiliser $|B| - k$ fois la propriété de l’échange entre B et A' , où $A' = A \cup \{s_k\}$ au début puis grossit en lui rajoutant des éléments de B . Alors $A' = B \setminus \{s_j\} \cup \{s_k\}$ pour un certain j et $s_j \notin A$. De plus, par hérédité, on a $A \cup \{s_j\} \in \mathcal{I}$. Or l’algorithme a choisi s_k en premier : on en déduit alors que $j > k$, donc que $w(s_k) \geq w(s_j)$, et donc que $w(A') \geq w(B)$. Comme B est une solution optimale, on a $w(A') = w(B)$ et A' est une solution optimale contenant $A \cup \{s_k\}$. Ainsi, à la fin du k ème tour de boucle, (H) est encore vraie.

À la sortie de la boucle, on a alors que (H) est encore vraie et A est un ensemble indépendant maximal : en effet, si on pouvait y rajouter s_j , alors $\{s_k, k < j \text{ et } s_k \in A\} \cup \{s_j\} \in \mathcal{I}$ par hérédité et alors s_j aurait dû être sélectionné par l’algorithme lors de la j ème itération. A étant un ensemble indépendant maximal contenu dans une solution optimale, A est optimal.

Ainsi l’algorithme renvoie bien une solution optimale. $\square$

Remarque 5. Montrer la correction de certains algorithmes gloutons revient alors à montrer qu’il existe une structure de matroïde associée au problème qu’on souhaite résoudre. Cette théorie est certes élégante, mais elle est malheureusement difficilement applicable en pratique car il est souvent difficile d’exhiber une structure de matroïde.

Application 6. L’algorithme de Kruksall pour calculer un arbre couvrant de poids minimal est correct.

Démonstration.

Il suffit de montrer qu’il existe une structure de matroïde. Soit $G = (V, E)$ un graphe. Alors on pose $S = E$ et $\mathcal{I} = \{A \subset E, A \text{ n’a pas de cycle}\}$. On vérifie que $(S, \mathcal{I})$ est un matroïde. L’hérédité est évidente. On remarque que l’ensemble $\mathcal{I}$ contient les éléments qui sont des réunions de sous-arbres disjoints sur G . Alors si $|A| < |B|$, (V, A) possède plus d’arbres que (V, B) , en comptant les arbres qui sont réduits à un seul sommet : il existe un arbre de B qui n’est pas inclus dans un arbre de A , c’est à dire une arête (u, v) dont les extrémités ne sont pas dans le même arbre de A : on peut rajouter cette arête à A sans créer de cycle, ce qui montre que $(S, \mathcal{I})$ est un matroïde et donc l’optimalité de la solution renvoyée par l’algorithme de Kruskall. $\square$