$\mathbb{K}[X]$ est principal

Théorème 1. *Soit $\mathcal{A}$ un anneau intègre.*

Alors $\mathcal{A}[X]$ euclidien $\Leftrightarrow$ $\mathcal{A}$ est un corps, et plus précisément :

$\mathcal{A}[X]$ principal $\Rightarrow$ $\mathcal{A}$ est un corps

$\mathcal{A}$ est un corps $\Rightarrow$ $\mathcal{A}[X]$ euclidien (donc principal).

Démonstration.

$\Rightarrow$ soient $a \in \mathcal{A}^*$ et $(P) = (a) + (X)$:

On a immédiatement $a = PQ$ ce qui implique $P = p$ et $Q = q$ d'où $a = p\,q$.

On a aussi $p = a\,U + X\,V$.

Posons $u = U(0)$, on a alors $p = a\,u$ et $a = p\,q$ donc $a = a\,u\,q$ donc $u\,q = 1$.

Enfin, on a $X = p\,R$ donc R de degré 1 donc $R = r\,X$ donc $X = p\,r\,X$ donc $p\,r = 1$.

On a donc p, q inversibles donc a aussi$\square$.

$\Leftarrow$ soit $\mathcal{A}$ un corps.

Soit $n > 0$ et soit $Q = b\,X^n + \ldots$

1) Démonstration par récurrence :

* Initialisation : pour tout $P = a\,X^n + \cdots$ on a $\varphi(P - a^{-1}\,b\,Q) < \varphi(Q)$ par définition.

* Récurrence : Soit $k \geqslant n$. Si on peut faire la division euclidienne de tout P de degré $\leqslant k$ par Q, alors soit $P = a\,X^{k+1} + \ldots,$ on a $\varphi(P - a\,b^{-1}X^{k+1-n}) < \varphi(P)$ donc on peut diviser $P - a\,b^{-1}X^{k+1-n}$ et vu que X^{n+1-p} aussi, l'hérédité peut s'enclencher.

2) Habillage par quotient de la récurrence :

$\mathcal{A}[X]/Q$ est généré par $\dot{1}, \dot{X}, \ldots, \dot{X^{n-1}}$ en utilisant le fait que la classe de Q est 0. $\square$

Remarque 2. Dès lors que $\mathcal{A}$ n'est pas un corps, $\mathcal{A}[X]$ n'est pas principal, (même si $\mathcal{A}$ l'est).

Exemples :

- $\mathbb{Z}[X]$ n'est pas principal (prendre $(X) + (2)$).
- voir paragraphe ?