

si $\mathcal{A}$ noetherien, alors $\mathcal{A}[X]$ noetherien aussi

Lemme 1. Soit $\mathcal{A}$ un anneau intègre. On a équivalence entre :

- i. $\mathcal{A}$ noetherien ;
- ii. tout suite croissante d'idéaux de $\mathcal{A}$ est stationnaire ;
- iii. tout ensemble quelconque d'idéaux de $\mathcal{A}$ a un élément maximal.

Démonstration.

$i \Rightarrow ii$: Soit $(\mathcal{I}_n)$ croissante, alors $\bigcup_n \mathcal{I}_n$ est un idéal donc engendré par des $a_1, \dots, a_m$ qui, étant en nombre fini, sont bien dans un même $\mathcal{I}_{n_0}$.

$ii \Rightarrow iii$: Soit $\{\mathcal{I}_i, i \in I\}$ un ensemble d'idéaux de $\mathcal{A}$ sans élément maximal. On construit la suite strictement croissante $(\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2, \dots)$ par récurrence et elle contredit (i).

$iii \Rightarrow i$: Soit $\mathcal{I}$ un idéal de $\mathcal{A}$.

Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble (non vide car $\{0\} \in \mathcal{E}$) des idéaux de type fini inclus dans $\mathcal{I}$ et soit $\mathcal{J}$ maximal dans $\mathcal{E}$. Soit $a \in \mathcal{I} \setminus \mathcal{J}$ alors $\mathcal{J} + (a) = \mathcal{I}$ (vu que $\mathcal{J}$ est maximal) donc $\mathcal{I}$ est de type fini. $\square$

Théorème 2. HILBERT Si $\mathcal{A}$ est noetherien, alors $\mathcal{A}[X]$ aussi (et donc $\mathcal{A}[X_1, \dots, X_n]$ aussi).

Démonstration. Soit $(\mathcal{I}_n)$ une suite croissante d'idéaux de $\mathcal{A}[X]$.

Soit $d_k(\mathcal{I}_n)$ l'ensemble des coefficients dominants des polynômes de degré k de $\mathcal{I}_n$.

$$\begin{array}{ccccccc} d_1(\mathcal{I}_1) & \subset & d_1(\mathcal{I}_2) & \subset & \dots & \subset & d_1(\mathcal{I}_{n_1}) \\ d_2(\mathcal{I}_1) & \subset & d_2(\mathcal{I}_2) & \subset & \dots & \subset & d_2(\mathcal{I}_{n_1}) \\ \dots & & \dots & & \dots & & \dots \\ d_{\ell-1}(\mathcal{I}_1) & \subset & d_{\ell-1}(\mathcal{I}_2) & \subset & \dots & \subset & d_{\ell-1}(\mathcal{I}_{n_{\ell-1}}) \\ d_{\ell}(\mathcal{I}_1) & \subset & d_{\ell}(\mathcal{I}_2) & \subset & \dots & \subset & d_{\ell}(\mathcal{I}_m) \end{array}$$

Figure 1.

Remarquons que :

- $d_k(\mathcal{I}_n)$ est un idéal de $\mathcal{A}$;
- $d_k(\mathcal{I}_n) \subset d_{k+1}(\mathcal{I}_n)$ (car $X\mathcal{I}_n \subset \mathcal{I}_n$) = croissance verticale ;
- $d_k(\mathcal{I}_n) \subset d_k(\mathcal{I}_{n+1})$ (car $\mathcal{I}_n \subset \mathcal{I}_{n+1}$) = croissance horizontale ;
- $\mathcal{I}_n = \mathcal{I}_{n'}$ ssi pour tout k on a : $d_k(\mathcal{I}_n) = d_k(\mathcal{I}_{n'})$.

Les $(d_k(\mathcal{I}_n))_n$ sont croissantes donc stationnaires à partir d'un $d_k(\mathcal{I}_{n_k})$.

De plus l'ensemble d'idéaux $\{d_k(\mathcal{I}_n), k, n\}$ admet un $d_{\ell}(\mathcal{I}_m)$ maximal.

Maintenant, soit N le max des $\{m, n_1, \dots, n_{\ell}\}$. Montrons que $(\mathcal{I}_n)$ est stationnaire à partir de N .

Soit $n \geq N$.

- soit $k \geq \ell$, alors par croissance horizontale puis verticale, on a :
 $d_{\ell}(\mathcal{I}_m) \subset d_{\ell}(\mathcal{I}_n) \subset d_k(\mathcal{I}_n)$ et $d_{\ell}(\mathcal{I}_m) \subset d_{\ell}(\mathcal{I}_n) \subset d_k(\mathcal{I}_N)$
donc, par maximalité, $d_k(\mathcal{I}_n) = d_k(\mathcal{I}_N)$ (tous deux égaux à $d_{\ell}(\mathcal{I}_m)$);
- soit $k \leq \ell$, alors, $(d_k(\mathcal{I}_n))_n$ étant stationnaire à partir de $n_k \leq N$ on a : $d_k(\mathcal{I}_n) = d_k(\mathcal{I}_N)$;
- pour tout k , on a $d_k(\mathcal{I}_n) = d_k(\mathcal{I}_N)$ et donc $\mathcal{I}_n = \mathcal{I}_N$. $\square$