

Leçon 150- Exemples d'actions de groupes sur les espaces de matrices.

I. Action par équivalence (Utilise en algèbre linéaire)

$$\begin{aligned} (GL_m(\mathbb{K}) \times GL_n(\mathbb{K})) \times \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}) &\longrightarrow \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}) \\ ((P, Q), A) &\longmapsto (P, Q).A = PAQ^{-1} \end{aligned}$$

- Prop : $A \approx B$ ssi elles représentent la même application linéaire
- Déf : Orbite := $\{(P, Q).A, (P, Q) \in GL_m(\mathbb{K}) \times GL_n(\mathbb{K})\}$
- Prop : Le rang est un invariant total
- Prop : Nombre de racine et degré
- Reformulation du thm du rang + pivot de Gauss pour calculer le rang
- Prop : Topologie des orbites

II. Action par similitude (Utile pour la réduction d'endomorphismes)

$$\begin{aligned} GL_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) &\longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ (P, A) &\longmapsto P.A = PAP^{-1} \end{aligned}$$

1. Cas particulier où A est diagonalisable :

- On a $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{D}_n(\mathbb{K})$
- $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})/\mathcal{G}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{C}^n/S_n$ bijective
- Le polynôme caractéristique est un invariant total pour cette action

2. Cas général :

- Prop : **Dev 1 : Topologie des classes de similitudes**
- A et B semblables ssi elles sont dans la même orbite = classe de similitude
- Stabilisateur = commutant
- A et B sont semblables ssi elles ont le même polynôme caractéristique

III. Action par congruence (Réduction de formes quadratiques)

$$\begin{aligned} GL_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) &\longrightarrow \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \\ (P, A) &\longmapsto P.A = PAP^T \end{aligned}$$

1. Algèbre linéaire

- Prop : Deux matrices sont congruentes ssi même orbite ssi elles représentent la même forme quadratique dans deux bases différentes
- Prop : Invariant : Discriminant, indice de Witt et rang
- Thm des invariants
- Déf : $O_n = Stab(I_n)$ et $S_n^{++} = Orb(I_n)$
- **Dev 2 : Décomposition polaire**

Bibliographie :

- 1-Caldero-Germoni : Nouvelles histoire hédonistes de groupes et de géométrie