

## Leçon 123- Corps finis. Applications.

### I. Généralités sur les corps finis. [1].p415 et [2]p.72

#### 1. Caractéristique

- Déf :  $\varphi : \mathbb{Z} \rightarrow k, n \mapsto n.1_k$  alors  $\text{Ker}(\varphi) = \text{idéal de } \mathbb{Z} = n\mathbb{Z}$
- Déf : Caractéristique du corps  $k = n$  (qui engendre le noyau du morphisme précédent)
- Prop : Soit  $n=0$ , soit  $n$  est premier
- Déf : Sous corps premier

#### 2. Cardinal

- Prop : Si  $\text{car}(k)=0$  alors  $k$  est infini
- Déf : Morphisme de Frobenius + prop du morphisme
- Thm : Si  $K$  est un corps fini alors  $|K|=p^n$  où  $p = \text{car}(K)$
- Prop : Cardinal des sous corps d'un corps fini

#### 3. Commutativité

- Lemme d'équation aux classes
- **Dev 1 : Thm de Wedderburn**

### II. Construction des corps finis

#### 1. Existence et unicité

- Explication de la construction [1]
- **Dev 2 : Existence et unicité des corps finis** [3]
- Qques exemples [1]

#### 2. Etude du groupe multiplicatif $\mathbb{F}_q^*$

- $\mathbb{F}_q^*$  est cyclique [2]
- Produit d'éléments de  $\mathbb{F}_q^*$  est  $\equiv -1$  [3]
- Thm de Wilson [3]

#### 3. Les carrés dans un corps fini [1]

- $\mathbb{F}_q^2 = \text{ensemble des carrés}$
- Pour  $p=2$  :  $\mathbb{F}_q^2 = \mathbb{F}_q \rightarrow \text{Frobenius}$
- Pour  $p>2$  :  $|\mathbb{F}_q^2| = \frac{q+1}{2}$
- Thm de caractérisation des carrés
- Corollaire :  $-1$  est un carré dans  $\mathbb{F}_q$  ssi  $q \equiv 1[4]$

### III. Polynômes irréductibles sur $\mathbb{F}_p$ [3]

- **Suite du dev 2 : Il existe des polynômes irréductibles de tout degré**
- Exemple :  $\mathbb{F}_4, \mathbb{F}_8$

#### Bibliographie :

- 1- Rombaldi : Algèbre et géométrie
- 2- Perrin : Cours d'algèbre
- 3-Gozard : Théorie de Galois