Lie-Kolchin

jojo

03/08/2018

1 Développement

Théorème 1. *Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Tout sous groupe connexe résoluble de $GL_n(\mathbb{C})$ est cotrigonalisable.*

Recasages. 101-103-106-150-151-154-157-204

La preuve qui suit est tirée de [2]. L'élément-clef est le lemme suivant.

Lemme 2. *Soit G un sous groupe connexe résoluble de $GL_n(\mathbb{C})$. Il existe un sous-espace strict non trivial de $\mathbb{C}^n$ qui soit G-stable.*

On va commencer par prouver le théorème par le lemme.

Démonstration. On va prouver le résultat par récurrence sur la dimension $n \in \mathbb{N}^\star$.

Initialisation. Pour n=1, le résultat est évident, les scalaires sont des matrices triangulaires supérieures.

Hérédité. Soit $n \in N^\star$ vérifiant $n \geq 2$. On suppose que le théorème est vrai pour tous les entiers strictement inférieurs à n. Soit G un sous groupe connexe résoluble de $GL_n(\mathbb{C})$ et W un sous-espace vectoriel comme dans le lemme. Soit W' un supplémentaire de W dans $\mathbb{C}^n$, dans une base adaptée à la décomposition $\mathbb{C}^n = W \oplus W'$ tout élément $g \in G$ est semblable à une matrice

$$\begin{pmatrix} \rho(g) & \zeta(g) \\ 0 & \rho'(g) \end{pmatrix} \tag{1}$$

Où $\rho(g) = g_{|W}$ et $\rho'(g) = \pi_{W'} \circ g_{|W'}$. ρ et ρ' sont des morphismes de groupes continus. Par conséquent $\rho(G)$ et $\rho'(G)$ sont des sous groupes connexes résolubles respectivement de $GL(W)$ et $GL(W')$, par HDR on peut les cotrigonaliser séparément, et on conclut par concaténation des bases.

Remarque 1. L'hypothèse de récurrence concerne des "sous groupes connexes et résolubles" : on a besoin d'une propriété de groupe et d'une propriété topologique, d'où la nécessité d'avoir des morphismes de groupes pour pousser la propriété résoluble, mais ces morphismes doivent aussi être continus pour pousser la connexité.

Remarque 2. Le procédé employé ici consistant à scinder le problème en exhibant un sous espace stable qui permet d'appliquer une hypothèse de récurrence est classique en algèbre linéaire, par exemple on peut l'utiliser pour : la cotrigonalisation d'ensembles abéliens de matrices carrées, les générateurs du groupe orthogonal...

□

On peut maintenant passer à la preuve du lemme.

Démonstration. Soit donc $n \in \mathbb{N}^\star$ et G un sous-groupe connexe résoluble de $GL_n(\mathbb{C})$. Dans le cas ou G est abélien, le théorème est un résultat classique, on supposera donc que G est non-abélien. Soit $l \in \mathbb{N}^\star$ le plus petit entier naturel tel que $D^l(G) = \{I_n\}$. Notons $A := D^{l-1}(G)$. Par minimalité de l, A est non trivial. De plus comme le groupe dérivée d'un sous groupe distingué est distingué, par récurrence immédiate A est distingué dans G. On a besoin de la proposition suivante :

Proposition 1. Soit G un groupe topologique connexe, alors $D(G)$ est connexe.

Démonstration. Posons $X := \{[g,h] := ghg^{-1}h^{-1}; g, h \in g\}$. Comme G est un groupe topologique, $[,]$ est une fonction continue et X est connexe comme image continue du connexe $G \times G$. Par définition

$$D(G) := \cup_{n\geq 1}(X \cup X^{-1})^n \tag{2}$$

Où $(X \cup X^{-1})^n$ désigne l'ensemble produits de n éléments de $X \cup X^{-1}$. Comme $I_n \in X$ et $I_n \in X^{-1}$ $X \cup X^{-1}$ est connexe comme union de connexes d'intersection non triviale. De même tous les $(X \cup X^{-1})^n$ sont connexes et contiennent I_n, donc $D(G)$ est connexe comme union de connexes d'intersection non triviale. □

Remarque 3. On peut tout à fait faire cette preuve dans les 15 minutes en écrivant peu, elle s'explique très bien à l'oral.

Et donc par une récurrence immédiate, A est connexe.

Comme $D(A)$ est trivial, A est abélien. Donc A est cotrigonalisable et l'ensemble

$$V := \{v \in \mathbb{C}^n, Av \subseteq \mathbb{C}v\} \tag{3}$$

est non trivial. Soit donc v un élément non nul de V. Pour $a \in A$ on note $\chi_v(a)$ l'unique nombre complexe tel que $a(v) = \chi_v(a)v$. Soit $a \in A$ alors pour tout $g \in G$

$$a(g(v)) = g(g^{-1}ag)(v) = \chi_v(g^{-1}ag)g(v) \tag{4}$$

On a utilisé ici le fait que A est distingué dans G.

L'application

$$\begin{aligned} G &\to \mathbb{C}^\star \\ g &\to \chi_v(g^{-1}ag) \end{aligned} \tag{5}$$

est continue, l'image de G est donc connexe et comme on a montré que $\chi_v(g^{-1}ag) = \chi_{g(v)}(a)$ c'est un connexe de l'ensemble discret des valeurs propres de a. Comme un connexe discret est trivial $\chi_{g(v)}(a) = \chi_v(a)$ pour tout $g \in G$.

Se que l'on vient de prouver ce reformule en disant que pour tout $a \in A$

$$W := Vect(\{g(v), g \in G\}) \tag{6}$$

est un sous espace propre de a. De plus il est G-stable car il a un système de générateurs G-stable. Comme v est non nul on a $W \neq \{0\}$. Il ne reste plus qu'à montrer que $W \neq \mathbb{C}^n$.

Par l'absurde supposons que $W = \mathbb{C}^n$. On a vu que W est un sous espace propre de tous les éléments de A. A est donc un groupe connexe d'homothéties. Comme $A = D(D^{l-2}(G))$ on a $A \subseteq SL_n(\mathbb{C})$. Autrement dit le rapport des éléments de A est une racine n-ième de l'unité. Donc via l'homéomorphisme qui envoie une homothétie sur son rapport, A s'identifie à un sous groupe connexe de l'ensemble discret des racines n-ièmes de l'unité. Comme un ensemble connexe discret est singleton A est trivial. Contradiction avec la minimalité de l.

Remarque 4. L'hypothèse G est non abélien intervient pour pouvoir écrire $A = D(D^{l-2}(G))$, puisque G non abélien assure $l \geq 2$.

□

2 Questions possibles, remarques

Remarque 5. La relation "être distingué dans" n'est pas transitive. Attention au début de la preuve du lemme donc à ne pas justifier que A est distingué dans G de cette manière la.

Remarque 6. Il existe plusieurs définitions équivalentes, voir par exemple [1]. Dans le développement on a utilisé la définition suivante

Définition 1. Un groupe G est dit résoluble si il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $D^n(G) = \{e_G\}$ où e_G est l'élément neutre de G.

De manière équivalente :

Définition 2. Un groupe G est dit résoluble ssi il existe $n \in \mathbb{N}$, et $G_0, ..., G_n$ des sous groupes de G tels que

$$\{e_G\} = G_0 \triangleleft G_1 \triangleleft ..... \triangleleft G_n = G \tag{7}$$

et pour tout i G_{i+1}/G_i est abélien.

où encore

Définition 3.

$$\{e_G\} = G_0 \triangleleft G_1 \triangleleft ..... \triangleleft G_n = G \tag{8}$$

et pour tout i G_{i+1}/G_i est cyclique.

Exercice 1. Montrer que les trois définitions sont équivalentes.

Exercice 2. Montrer que S_3 et S_4 sont résolubles.
Montrer qu'un groupe simple est résoluble si et seulement si il est abélien.
Donc $\mathcal{A}_n$ est il résoluble pour $n \geq 5$?
Montrer que S_5 n'est pas résoluble.

Pour la culture on peut citer le théorème lunaire suivant, à l'énoncé très concis mais d'une difficulté incroyable (lire par exemple l'article : `http://images.math.cnrs.fr/Coq-et-caracteres.html`).

Théorème 3. *(Feit-Thompson)*
Tout groupe fini d'ordre impair est résoluble.

La première question du jury risque d'être : avez vous une idée de la preuve dans le cas abélien ?

Proposition 2. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ et $X \subset M_n(\mathbb{C})$ un ensemble commutatif. Alors X est cotrigonalisable.

Démonstration. Si tous les éléments de X sont des homothéties, la proposition est démontrée. Sinon il existe un élément de X qui a un sous espace propre non trivial et non tout l'espace, que l'on notera V. Comme on le vérifie facilement cet espace est stabilisé par tous les éléments de X. On peut ensuite prouver la proposition par récurrence exactement comme dans la preuve du théorème de Lie-Kolchin. $\square$

Exercice 3. Le sous-groupe des matrices triangulaires supérieures inversibles est un sous-groupe résoluble connexe de $GL_n(\mathbb{C})$.

Exemple 1. On peut injecter S_4 dans $GL_4(\mathbb{C})$ via les matrices de permutations. La droite engendrée par $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est stable. En restreignant l'action à un supplémentaire stable on obtient une injection de S_4 dans $GL_3(\mathbb{C})$. On peut montrer que cette sous-représentation est irréductible grâce à la formule de Burnside (cf Proposition 3.11.1 p281 dans [3]). Si l'injection de S_4 dans $GL_4(\mathbb{C})$ était cotrigonalisable, on aurait d'autres sous représentations. Donc S_4 vu comme un sous-groupe de $GL_4(\mathbb{C})$ n'est pas cotrigonalisable, pourtant il est résoluble (cf par exemple [1]). L'hypothèse connexe est donc nécessaire pour le théorème de Lie-Kolchin.

Exemple 2. Il faut savoir ce qu'est un ensemble discret. Par exemple $\mathbb{Q}$ n'est pas discret dans $\mathbb{R}$.

Références

[1] Jean-Pierre Escofier. *Théorie de Galois.* 1997.

[2] P.Caldero et J.Germoni. *Nouvelles histoires hédonistes de groupes et de géométries. Tome 1.* 2016.

[3] P.Caldero et J.Germoni. *Nouvelles histoires hédonistes de groupes et de géométries. Tome 2.* 2018.