Théorème de Lindeberg

Théorème. *Soit $(r_n)_n$ une suite d'entiers et $(X_{n,k})_{1\leq k\leq r_n}$ des variables aléatoires centrées indépendantes (selon k). On note $\sigma_{n,k}^2 = \mathbb{E}[X_{n,k}^2]$, $s_n^2 = \sum_{k=1}^{r_n} \sigma_{n,k}^2$, $S_n = \sum_{k=1}^{r_n} X_{n,k}$. On suppose de plus que les $(X_{k,n})$ vérifient la condition de Lindeberg :*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \frac{1}{s_n^2}\sum_{k=1}^{r_n} \mathbb{E}[X_{n,k}^2 1_{|X_{n,k}|>\varepsilon s_n}] \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Alors $\frac{S_n}{s_n}$ converge en loi vers une loi normale centrée réduite.

Démonstration. Quitte à renormaliser les $X_{n,k}$ par s_n, on suppose que $s_n = 1$. On note $\phi_{n,k}$ la fonction caractéristique de $X_{n,k}$, et ϕ_n celle de S_n. Grâce au théorème de Lévy, il suffit de montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\phi_n(t) \to \exp(-\frac{t^2}{2})$.

Deux lemmes utiles par la suite :

Soient $a_1, a_2..a_n$ et $b_1, b_2..b_n$ des nombres complexes du disque unités on peut montrer par récurrence que

$$|a_1a_2..a_n - b_1b_2..b_n| \leq |a_1 - b_1| + .. + |a_n - b_n|$$

On utilisera aussi le fait que $\sup(\sigma_{n,k}, 1 \leq k \leq r_n) \to 0$. En effet, soit $\varepsilon > 0$, il existe n_0 tel que pour tout $n > n_0$,

$$\sum_{k=1}^{r_n} \mathbb{E}[X_{n,k}^2 1_{|X_{n,k}|>\varepsilon}] \leq \varepsilon$$

Ainsi, pour tout $n > n_0$, k, on a

$$\mathbb{E}[X_{n,k}^2] = \mathbb{E}[X_{n,k}^2 1_{|X_{n,k}|\leq\varepsilon}] + \mathbb{E}[X_{n,k}^2 1_{|X_{n,k}|>\varepsilon}] \leq \varepsilon^2 + \varepsilon$$

On fixe un $t \in \mathbb{R}$ dans la suite, et on écrit :

$$\begin{aligned} |\phi_n(t) - \exp(-\frac{t^2}{2})| &= |\prod_{k=1}^{r_n} \phi_{n,k}(t) - \prod_{k=1}^{r_n} \exp(-\frac{\sigma_{n,k}^2 t^2}{2})| \\ &\leq \sum_{k=1}^{r_n} |\phi_{n,k}(t) - \exp(-\frac{\sigma_{n,k}^2 t^2}{2})| \\ &= A + B \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} A &= \sum_{k=1}^{r_n} |\phi_{n,k}(t) - (1 - \frac{\sigma_{n,k}^2 t^2}{2})| \\ B &= \sum_{k=1}^{r_n} |\exp(-\frac{\sigma_{n,k}^2 t^2}{2}) - (1 - \frac{\sigma_{n,k}^2 t^2}{2})| \end{aligned}$$

Majoration de A :

Un développement de Taylor donne que

$$
\begin{aligned}
e^{ix} &= 1 + ix - \frac{1}{2}x^2 + \mathcal{O}_{x\to 0}(x^3) \\
\text{et } e^{ix} &= 1 + ix - \frac{1}{2}x^2 + \mathcal{O}_{x\to \infty}(x^2)
\end{aligned}
$$

Il existe donc $C > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$
|e^{ix} - (1 + ix - \frac{1}{2}x^2)| \leq C\min(|x|^2, |x|^3)
$$

On a alors :

$$
\begin{aligned}
|\phi_{n,k}(t) - (1 - \frac{1}{2}\sigma_{n,k}^2)| &\leq \mathbb{E}[|e^{itX_{n,k}} - (1 + itX_{n,k} - \frac{1}{2}t^2X_{n,k}^2)|] \\
&\leq C\mathbb{E}[\min(|tX_{n,k}|^2, |tX_{n,k}|^3)]
\end{aligned}
$$

Donc, pour tout $\varepsilon \in]0,1[$:

$$
\begin{aligned}
A &\leq \sum_{k=1}^{r_n} |\phi_{n,k}(t) - (1 - \frac{1}{2}\sigma_{n,k}^2)| \\
&\leq C\sum_{k=1}^{r_n} \mathbb{E}[\min(|tX_{n,k}|^2, |tX_{n,k}|^3)] \\
&\leq C\sum_{k=1}^{r_n} \varepsilon\mathbb{E}[|tX_{n,k}|^2 1_{|tX_{n,k}|\leq\varepsilon}] + \mathbb{E}[|tX_{n,k}|^2 1_{|tX_{n,k}|>\varepsilon}] \\
&\leq Ct^2\varepsilon + Ct^2\sum_{k=1}^{r_n} \mathbb{E}[|X_{n,k}|^2 1_{|tX_{n,k}|>\varepsilon}]
\end{aligned}
$$

On retrouve la condition de Lindeberg dans le second terme.

Majoration de B :

Le développement de l'exponentielle en série entière donne que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|\exp(z) - (1+z)| \leq |z|^2\exp(|z|)$. D'où

$$
|\exp(-\frac{\sigma_{n,k}^2t^2}{2}) - (1 - \frac{\sigma_{n,k}^2t^2}{2})| \leq \sigma_{n,k}^2 \times \left(\frac{t^4}{4}\sup(\sigma_{n,k}^2, 1\leq k\leq r_n)\exp(\sup(\sigma_{n,k}, 1\leq k\leq r_n))\right)
$$

Donc

$$
\begin{aligned}
B &\leq \sum_{k=1}^{r_n} \sigma_{n,k}^2 \times \left(\frac{t^4}{4}\sup(\sigma_{n,k}^2, 1\leq k\leq r_n)\exp(\sup(\sigma_{n,k}, 1\leq k\leq r_n))\right) \\
&\leq \left(\frac{t^4}{4}\sup(\sigma_{n,k}^2, 1\leq k\leq r_n)\exp(\sup(\sigma_{n,k}, 1\leq k\leq r_n))\right) \to 0
\end{aligned}
$$

Ce qui achève la preuve. $\square$