leçons :

254 : Espaces de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et distributions tempérées. Transformation de Fourier

255. Espaces de Schwartz. Dérivation au sens des distributions.

$y'' - y = H$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$

26

Références :

Prop: L'équation différentielle (E) : $y'' - y = H(x)$ admet une unique solution tempérée, qui est une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

preuve :

- Unicité : Si $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ est solution de (E), alors $f'' - f = H$

et en appliquant la transformée de Fourier $\mathcal{F} : \mathcal{S}'(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R})$

$$\forall \xi \in \mathbb{R} \qquad -\xi^2 \mathcal{F}(f) - \mathcal{F}(f) = \mathcal{F}(H)$$

$$\forall \xi \in \mathbb{R} \qquad \mathcal{F}(f) = -\frac{1}{1+\xi^2}\mathcal{F}(H)$$

$\mathcal{F} : \mathcal{S}'(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ est bijective, d'où l'unicité de f.

- Existence :
- Recherche d'une solution élémentaire :

① On veut résoudre $y'' - y = \delta_0$, on va raisonner par analyse et vérifier à la fin que la solution obtenue convient.

Soit E la solution de $y'' - y = \delta_0$, d'après ce qui précède $\mathcal{F}(E)(\xi) = \frac{-1}{1+\xi^2}\mathcal{F}(\delta_0)(\xi)$

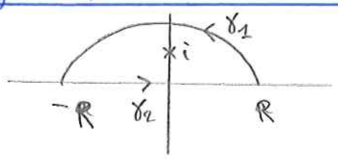
$= \frac{-1}{1+\xi^2} \quad (\mathcal{F}(\delta_0) = 1)$

Donc $E(x) = \mathcal{F}^{-1}\left(-\frac{1}{1+\xi^2}\right)(x) = -\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{ixy}}{1+y^2}\,dy$

($\mathcal{F}(E)$ est une fonction donc E aussi)

② Calcul de l'intégrale par la méthode des résidus

1er cas : $x \geqslant 0$



On pose $\varphi : \begin{cases} \mathbb{C}\setminus\{-i,i\} \to \mathbb{C} \\ z \mapsto \frac{e^{ixz}}{1+z^2} \end{cases}$

φ est holomorphe sur $\mathbb{C}\setminus\{-i,i\}$ et $\forall z \in \mathbb{C}\setminus\{-i,i\}$ $\varphi(z) = \frac{e^{ixz}}{2i}\left(\frac{1}{z-i} - \frac{1}{z+i}\right)$

donc par la formule des résidus $\frac{1}{2i\pi}\oint_{\Gamma} \varphi(z)\,dz = \operatorname{Res}(\varphi, i) = \frac{e^{-x}}{2i}$

D'autre part $\int_{\Gamma} \varphi(z)\,dz = \int_{\gamma_1} \varphi(z)\,dz + \int_{\gamma_2} \varphi(z)\,dz$

- $\int_{\gamma_2} \varphi(z)\,dz = \int_{-R}^{R} \frac{e^{ixy}}{1+y^2}\,dy \xrightarrow[R\to+\infty]{} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{ixy}}{1+y^2}\,dy$

$$\bullet \left|\int_{\gamma_1} \varphi(z)\,dz\right| = \left|\int_{\theta=0}^{\pi} \frac{e^{ixRe^{i\theta}}}{1+R^2e^{2i\theta}} Rie^{i\theta}d\theta\right| \leqslant \int_0^{\pi} \frac{e^{-xR\sin\theta}}{|1+R^2e^{2i\theta}|} R\,d\theta$$

$$\leqslant \int_0^{\pi} \frac{R}{R^2-1}\,d\theta \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad (\sin\theta \geqslant 0 \text{ sur } [0,\pi])$$

D'où $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{ixy}}{1+y^2}\,dy = \pi e^{-x} \quad \forall x \geqslant 0$

<u>2e cas</u> : <u>$x<0$</u>

On conjugue : $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-ixy}}{1+y^2}\,dy = \pi e^{-x} \quad \forall x \geqslant 0$

donc $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{ixy}}{1+y^2}\,dy = \pi e^{x} \quad \forall x \leqslant 0$

- <u>Solution de (E) par convolution</u>

Formellement, on pose $f(x) = (E * H)(x)$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \int_{\mathbb{R}} E(y)\,H(x-y)\,dy = -\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} (e^{-y}\mathbb{1}_{y\geqslant 0} + e^{y}\mathbb{1}_{y<0})\,\mathbb{1}_{x\geqslant y}\,dy$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\int_0^{+\infty} e^{-y}\mathbb{1}_{x\geqslant y}\,dy + \int_{-\infty}^{0} e^{y}\mathbb{1}_{x\geqslant y}\,dy\right]$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\mathbb{1}_{x\geqslant 0}\int_0^{x} e^{-y}\,dy + \mathbb{1}_{x<0}\int_{-\infty}^{x} e^{y}\,dy + \mathbb{1}_{x\geqslant 0}\int_{-\infty}^{0} e^{y}\,dy\right]$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\mathbb{1}_{x\geqslant 0}(1-e^{-x}) + \mathbb{1}_{x<0}\,e^{x} + \mathbb{1}_{x\geqslant 0}\right]$$

$$= -\frac{1}{2}\left[(2-e^{-x})\mathbb{1}_{x\geqslant 0} + e^{x}\mathbb{1}_{x<0}\right]$$

f ainsi définie est continue et vérifie l'équation différentielle

On peut le vérifier en dérivant à la main ou en appliquant la formule des sauts.