Leçon 243 : Convergence des séries entières, propriétés de la somme. Exemples et applications.

1 Définition et rayon de convergence

Définition 1. On appelle série entière (S.E.) une série de fonctions de la forme $\sum a_n z^n$ avec $z \in \mathbf{C}$ et (a_n) une suite dans $\mathbf{C}$.

Lemme 2 (Abel)**.** *Soit $R = \sup\left\{r \geqslant 0 \mid (a_n r^n) \text{ bornée}\right\} \in [0, +\infty]$. Alors :*
- *si $|z| < R$, la série $\sum a_n z^n$ converge absolument.*
- *si $|z| > R$, la série $\sum a_n z^n$ diverge grossièrement.*

Le nombre R est appelé rayon de convergence de la série.

Exemple 3.
1. série géométrique $\sum z^n$, $R = 1$.
2. $\sum a_n z^n$ où a_n est la n-ième décimal de $\sqrt{2}$, $R = 1$.

Proposition 4 (critère de D'Alembert)**.** *Si $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| \to \lambda \in [0, +\infty]$ alors $R = \frac{1}{\lambda}$ (avec comme convention $\frac{1}{0} = \infty$ et $\frac{1}{\infty} = 0$).*

Exemple 5.
1. $\exp(z) = \sum \frac{z^n}{n!}$, $R = +\infty$.
2. $\sum n!\, z^n$, $R = 0$.

Proposition 6 (critère de Cauchy)**.** *Si $|a_n|^{\frac{1}{n}} \to \lambda \in [0, +\infty]$ alors $R = \frac{1}{\lambda}$.*

Proposition 7 (formule de Hadamard)**.** $\frac{1}{R} = \limsup |a_n|^{\frac{1}{n}}$

Exemple 8.
1. $\sum \mathrm{e}^{n \sin(n)} z^n$, $R = \mathrm{e}^{-1}$.
2. si $\sum a_n z^n$ a pour rayon de CV. R alors $\sum a_n z^{2n}$ a pour rayon de CV. $\sqrt{R}$.

Remarque 9. Comme $\liminf |\frac{a_{n+1}}{a_n}| \leqslant \limsup |a_n|^{\frac{1}{n}} \leqslant \limsup |\frac{a_{n+1}}{a_n}|$, si le critère de D'Alembert s'applique alors le critère de Cauchy s'applique aussi.

2 Régularité de la somme dans le disque de convergence

Proposition 10. *Soient $\sum a_n z^n$ de rayon R_a, $\sum b_n z^n$ de rayon R_b et $\lambda \in \mathbf{C}$.*

1. *La S.E. $\sum (a_n + b_n) z^n$ a pour rayon de CV. $R_{a+b} \geqslant \min(R_a, R_b)$ avec égalité si $R_a \neq R_b$. De plus, $\forall |z| < \min(R_a, R_b)$, on a*
$$\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$$
2. *La S.E. $\sum \lambda a_n z^n$ a le même rayon de CV. que $\sum a_n z^n$ et $\forall |z| < R_a$, on a*
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda a_n z^n = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$
3. *Soit $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$, on appelle produit de Cauchy des séries $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ la S.E. $\sum c_n z^n$. Son rayon de CV. vérifie $R_c \geqslant \min(R_a, R_b)$ et pour tout $|z| < \min(R_a, R_b)$, on a*
$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n\right)$$

Ainsi, l'ensemble des S.E. de rayon de CV.$\geqslant R$ est une algèbre sur $\mathbf{C}$.

Exemple 11.
1. $(1 - z) \times \sum z^n = 1$ pour tout $|z| < 1$. On voit ici que $R_a = \infty$, $R_b = 1$ et $R_c = \infty$.
2. Soit $\sum a_n z^n$ de rayon de CV. R et $A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$. Alors $\forall |z| < \min(1, R)$, $\sum_{n=0}^{+\infty} A_n z^n = \frac{1}{1-z} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$.

On considère à présent une S.E. $\sum a_n z^n$ de rayon de CV. R et on note $f(z)$ sa somme pour $z \in \mathrm{D}(0, R)$.

Proposition 12. *La série $\sum a_n z^n$ converge normalement sur tout compacte de $\mathrm{D}(0, R)$. En particulier, f est continue sur $\mathrm{D}(0, R)$.*

Définition 13. On appelle série dérivée de $\sum a_n z^n$ la S.E. $\sum_{n>0} n a_n z^{n-1}$. Son rayon de CV. est le même que celui de $\sum a_n z^n$.

Proposition 14. *f est $\mathbf{C}$–dérivable sur $\mathrm{D}(0,R)$ et $f'(z)=\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n z^{n-1}$.*

Corollaire 15. *f est indéfiniment $\mathbf{C}$–dérivable sur $\mathrm{D}(0,R)$ et $\forall n\in\mathbf{N}$, $a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$.*

Corollaire 16. *f admet une primitive sur $\mathrm{D}(0,R)$ donnée par $F(z)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{z^{n+1}}{n+1}$.*

Exemple 17.

1. $\log(1+x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n}$ sur $]-1,1[$.
2. $\arctan(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ sur $]-1,1[$.

Définition 18. Soit U un ouvert de $\mathbf{R}$ (resp. de $\mathbf{C}$) et $f:U\to\mathbf{C}$. On dit que f est développable en série entière (D.S.E.) en $x_0\in U$ s'il existe une S.E. $\sum a_n z^n$ de rayon de CV. $R>0$ telle que $\forall x\in U$, $|x-x_0|<R$, on a $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n$.
Si f est développable en série entière en tout point de U, on dit que f est analytique sur U.

Théorème 19. *Les série entières sont analytiques dans leur disque de convergence.*

Corollaire 20. *Si U est un ouvert de $\mathbf{R}$ et f est analytique sur U alors f est C^∞ et les coefficients de son D.S.E. en chaque $x_0\in U$ sont donnés par $a_n=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$.*

Remarque 21. Sur $\mathbf{R}$, $\mathrm{C}^\infty \not\Rightarrow$ analytique, par exemple $f(x)=\begin{cases} \mathrm{e}^{-1/x} & x>0 \\ 0 & x\leqslant 0\end{cases}$.

Théorème 22. *Soit U ouvert de $\mathbf{R}$ et f C^∞ sur U. Alors f est analytique sur U ssi $\forall x\in U$, $\exists V\in\mathcal{V}(x)$, $\exists R,M>0$, $\forall y\in V$, $|f^{(n)}(y)|\leqslant n!\frac{M}{R^n}$.*

Application : Résolution d'E.D.O linéaires. La solution générale de l'équation $xy''+(x-2)y'+2y=0$ est $y(x)=\alpha(1-x-\frac{x^2}{2})+\beta\mathrm{e}^{-x}$ où $\alpha,\beta\in\mathbf{R}$.

3 Holomorphie et séries entières

Définition 23. Soit U un ouvert de $\mathbf{C}$ et $f:U\to\mathbf{C}$. On dit que f est holomorphe sur U si f est continument $\mathbf{C}$–dérivable sur U.

Théorème 24. *Si $f:U\to\mathbf{C}$ est holomorphe alors f est analytique sur U.*

Exemple 25. D.S.E. des fractions rationnelles en 0.

Corollaire 26.

1. *Si $f:U\to\mathbf{C}$ est analytique et ne s'annule pas sur U alors $\frac{1}{f}$ est analytique sur U.*
2. *La composition de deux fonctions analytiques est analytique.*
3. *Si $f:U\to f(U)\subseteq\mathbf{C}$ est holomorphe et bijective alors sa réciproque est holomorphe (conséquence du théorème d'inversion locale). Donc si f est analytique et bijective, son application réciproque est encore analytique.*

Théorème 27 (zéros isolés)**.** *Si $f:U\to\mathbf{C}$ est analytique non identiquement nulle et si $z_0\in U$ tel que $f(z_0)=0$ alors il existe V voisinage de z_0 tel que f ne s'annule pas sur $V\setminus\{z_0\}$.*

Théorème 28 (principe du prolongement analytique)**.** *Soit U ouvert connexe de $\mathbf{C}$ et $f:U\to\mathbf{C}$ analytique. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *f est identiquement nulle sur U.*
2. *$f^{-1}(\{0\})$ possède un point d'accumulation dans U.*
3. *$\exists z_0\in U$ tel que $\forall n\in\mathbf{N}$, $f^{(n)}(z_0)=0$.*

Théorème 29 (formule de Cauchy)**.** *Soit $f:U\to\mathbf{C}$ analytique et soient $z_0\in U$ et $r>0$ tels que $\overline{\mathrm{D}}(z_0,r)\subseteq U$. Alors pour tout $n\in\mathbf{N}$, on a*

$$\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}=\frac{1}{2\mathrm{i}\pi}\int_{\mathrm{C}(z_0,r)}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}z$$

Corollaire 30 (inégalités de Cauchy)**.** $|\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}|\leqslant r^{-n}\max\limits_{|z-z_0|=r}|f(z)|$

Théorème 31 (Liouville)**.** *Si f est analytique sur $\mathbf{C}$ et bornée alors f est constante.*

Corollaire 32 (théorème de D'Alembert–Gauss)**.** *Tout polynôme $P\in\mathbf{C}[X]$ non constant admet une racine dans $\mathbf{C}$.*

Théorème 33 (Formule de Parseval)**.** *Soit $f : U \to \mathbf{C}$ analytique et soit $\overline{\mathrm{D}}(z_0, r) \subseteq U$, alors :*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left| \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \right|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| f\left(z_0 + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right) \right|^2 \mathrm{d}\theta$$

Exemple 34. Si $\sum a_n z^n$ de rayon de CV. $R \geqslant 1$ est bornée sur $\mathrm{D}(0,1)$ et si $\forall n \in \mathbf{N}$, $a_n \in \mathbf{Z}$ alors $\sum a_n z^n$ est un polynôme.

4 Comportement sur le bord du disque de convergence

Théorème 35 (Abel non tangentiel)**.** *Soit $\sum a_n z^n$ une S.E. de rayon de* CV. *$R = 1$ et soit f sa somme. Pour $\theta_0 \in [0, \frac{\pi}{2}[$, on définit le secteur angulaire*

$$\Delta_{\theta_0} = \mathrm{D}(0,1) \cap \left\{ 1 - \rho \mathrm{e}^{i\theta} \;\middle|\; \rho > 0,\ |\theta| \leqslant \theta_0 \right\}$$

Si la série $\sum a_n$ converge alors $\lim\limits_{\substack{z \to 1 \\ z \in \Delta_{\theta_0}}} f(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$.

Exemple 36.

1. $\log(2) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$
2. $\frac{\pi}{4} = \arctan(1) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$
3. Soient $\sum a_n$ et $\sum b_n$ deux séries convergentes et soit $\sum c_n$ leur produit de Cauchy. Si $\sum c_n$ converge alors $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n = \left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n\right) \cdot \left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n\right)$

Remarque 37.

1. La réciproque est fausse, par exemple $\sum (-1)^n x^n \to \frac{1}{2}$ mais $\sum (-1)^n$ diverge.
2. L'hypothèse $z \in \Delta_{\theta_0}$ est indispensable. Par exemple, pour la série entière $f(z) = \sum_{n>0} \frac{-z^{(3^n)} + z^{(2 \cdot 3^n)}}{n}$, $f(1) = 0$ mais $\forall p \in \mathbf{N}^*$, $|f(r \exp(\mathrm{i}\pi 3^{-p})|$ n'est pas borné lorsque $r \to 1$.

Théorème 38 (Taubérien faible)**.** *Soit $\sum a_n z^n$ une S.E. de rayon de* CV. *$R = 1$ et soit f sa somme. On suppose qu'il existe $S \in \mathbf{C}$ tel que $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f(x) = S$. Si $a_n = \mathrm{o}(1/n)$ alors $\sum a_n$ converge vers S*

Définition 39. Soit $\sum a_n z^n$ de rayon de CV. R fini et soit f sa somme. Un point $z_0 \in \mathrm{C}(0,R)$ est dit régulier si f admet un prolongement analytique sur un voisinage de z_0. Sinon, il est dit singulier.

Remarque 40. convergence sur le bord $\neq$ régularité, par exemple $\sum z^n$, $\sum \frac{z^n}{n+1}$ et $\sum \frac{z^n}{(n+1)(n+2)}$.

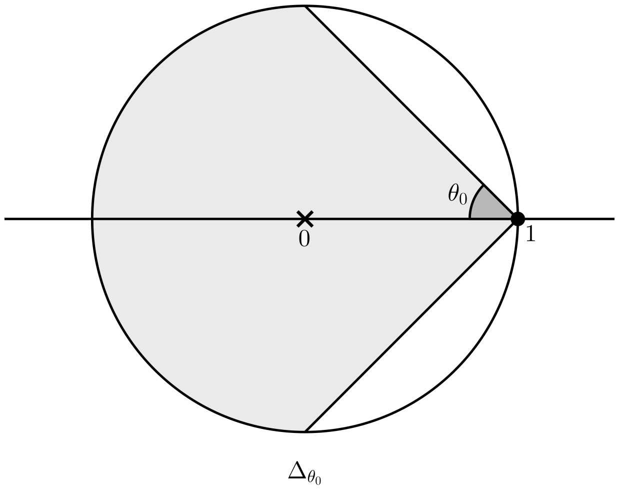
Proposition 41. *Toute série entière de rayon R fini admet un point singulier.*

Théorème 42 (lacunes de Hadamard)**.** *Soit (λ_n) suite dans $\mathbf{N}^*$ telle que $\lambda_{n+1} \geqslant \alpha \lambda_n$ avec $\alpha > 1$. Soit $\sum a_n z^{\lambda_n}$ de rayon R fini. Alors tout point du bord du disque de convergence est singulier.*

Développements

1. Théorèmes d'Abel non tangentiel et Taubérien faible. **[35]**
2. Théorème des lacunes de Hadamard. **[42]**

Annexe



Références

— BECK, MALICK et PEYRÉ, *Objectif agrégation.*
— DANTZER, *Mathématiques pour l'agrégation, analyse et probabilités.*
— GOURDON, *Les maths en tête, analyse.*
— QUEFFÉLEC et ZUILY, *Analyse pour l'agrégation.*