Déterminant de Vandermonde, inégalité de Hadamard et application à un problème d'optimisation

Théorème. *Soient $x_1, .., x_n \in \mathbb{C}$, on note $V(x_1, .., x_n) \in M_n(\mathbb{C})$ la matrice dont le coefficient (i, j) est x_j^{i-1}, et on note $v(x_1, .., x_n)$ son determinant. Alors*

$$v(x_1, .., x_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$$

Démonstration. Sans perte de généralité, on suppose les (x_i) distincts. On procède par récurrence sur n ; c'est vrai pour $n = 1$, et si c'est vrai au rang $n - 1$, on considère le polynôme $v(x_1, .., x_{n-1}, X)$: par un développement du déterminant selon la dernière ligne, on voit que c'est un polynôme de degré $N - 1$ par hypothèse de récurrence. Son coefficient dominant est $v(x_1, .., x_{n-1})$. De plus, il s'annule en les $(x_i)_{i=1..n-1}$, d'où

$$v(x_1, .., x_n) = v(x_1, .., x_{n-1}) \prod_{i=1}^{n-1} (x_n - x_i)$$

D'où le résultat. □

Théorème. *Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$, on note $(v_i)_{i=1..n}$ ses colonnes, alors on a l'inégalité de Hadamard :*

$$|\det(A)| \leq \prod_{i=1}^{n} \|v_i\|_2$$

Avec égalité si et seulement si les (v_i) sont deux à deux orthogonales.

Démonstration. On utilise la décomposition Q, R de A : on peut supposer A inversible et on applique le procédé de Gram-Schimdt à la famille $(v_1, .., v_n)$, pour obtenir une famille de vecteur orthogonormaux $(w_1, .., w_n)$.
On écrit $v_j = \sum_{k=1}^{j} w_k R_{k,j}$, où $R \in T_n^+(\mathbb{C})$, et on note Q la matrice orthogonale de colonnes (w_j). On a alors $A = QR$, et

$$\begin{aligned} |\det(A)| &= |\det(R)| \\ &= \prod_{i=1}^{n} |R_{i,i}| \end{aligned}$$

Or, $|R_{i,i}| \leq \sqrt{\sum_{j=1}^{i} R_{j,i}^2} = \|v_i\|_2$, avec égalité pour tout i si et seulement si R est diagonale, donc les v_i sont orthogonales. □

Corollaire. *Soit $\mathbb{D}$ le disque unité fermé, le maximum de*

$$f : \begin{cases} \mathbb{D}^n \to \mathbb{R} \\ (z_1, .., z_n) \mapsto \prod_{1 \leq i < j \leq n} |z_j - z_i| \end{cases}$$

vaut $n^{n/2}$ et est atteint pour les polygônes réguliers exactement.

Démonstration.

$$\begin{aligned}
f(z_1,..,z_n) &= |\det V(z_1,..,z_n)| \\
&\leq \prod_{i=1}^{n} \sqrt{1+|z_i|^2+..+|z_i|^{2(n-1)}} && \text{avec égalité ssi les } ((z_i^j)_j)_i \text{ sont orthogonaux} \\
&\leq \prod_{i=1}^{n} \sqrt{n} && \text{avec égalité ssi } \forall i, |z_i| = 1 \\
&= n^{n/2}
\end{aligned}$$

Notons enfin que $\begin{bmatrix} 1 \\ z_i \\ z_i^2 \\ \vdots \\ z_i^{n-1} \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} 1 \\ z_j \\ z_j^2 \\ \vdots \\ z_j^{n-1} \end{bmatrix}$ sont orthogonaux si et seulement si $z_i \bar{z_j} \in \mathbb{U}_n$. $\square$