Approximation d'une fonction par des polynômes et des polynômes trigonométriques. Exemples et applications.

(I) Approximation ponctuelle

1) Tangente en un point

Déf 1 : Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$. On dit que f est dérivable en a si $\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$ existe.
Dans ce cas, $T_a : y = (x-a)f'(a) + f(a)$ est la tangente en a à la courbe.

DVPT ①
Appli : Méthode de Newton : Soit $f \in C^2([a,b],\mathbb{R})$ tq $f(a) < 0 < f(b)$ et $\forall x \in [a,b],\ f'(x) > 0$
On considère la suite définie par $x_0 \in [a,b]$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = g(x_n)$.
Alors, $\exists !\, \alpha \in [a,b]$ tq $f(\alpha) = 0$ et $\exists \delta > 0,\ \forall x_0 \in [\alpha-\delta, \alpha+\delta]$, (x_n) converge quadratiquement vers α.
Si de plus, $f'' > 0$, alors $\forall x \in]\alpha, b]$, (x_n) est décroissante vers α.

2) Développement limité

Formule de Taylor-Young : Soit $f \in C^n(I)$ et $a \in I$, alors $f(a+x) = \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(a) \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$

Exple 4 : $\exp(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$; $\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n)$

Rq 5 : $x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = o(x^2)$ bien que $x \mapsto x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ n'est pas 2 fois dérivable en 0.

Exple 6 : Soit $X \in L^2(\Omega,\mathbb{R})$, alors $\varphi_X(t) = 1 + i\,\mathbb{E}(X)t - \frac{\mathbb{V}(X) + \mathbb{E}(X)^2}{2} t^2 + o(t^2)$.

DV ②
Appli 7 : Théorème limite central : Soit (X_n) suite de v.a.r iid admettant un moment d'ordre 2.
Si $\sigma^2 = \mathbb{V}(X_1) > 0$ alors $Z_n = \sqrt{n} \cdot \frac{\overline{X_n} - \mathbb{E}(X_n)}{\sigma} \xrightarrow[n \to \infty]{\mathcal{L}} Z \sim \mathcal{N}(0,1)$.

3) Interpolation

Th 8 : Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_0 < a_1 < \dots < a_n \in I$ et $f : I \to \mathbb{R}$. $\exists !\, P_f \in \mathbb{R}_n[X]$ tq $\forall i \in [\![0,n]\!],\ f(a_i) = P(a_i)$, appelé polynôme interpolateur de Lagrange. Il est donné par $P_f(X) = \sum_{k=0}^{n} f(a_k) \cdot \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{n} \frac{X - a_j}{a_k - a_j}$.

Prop 9 : Soit $f \in C^{n+1}(I)$. $\forall x \in I,\ \exists c_x \in I$ tq $f(x) - P_f(x) = \frac{1}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (x - a_i) \cdot f^{(n+1)}(c_x)$.

4) Méthodes d'intégration numériques.

Méthode des rectangles : Soit $f \in C^1([a,b],\mathbb{R})$. On pose $R_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \cdot \frac{b-a}{n}\right)$
alors $\left| \int_a^b f(t)\,dt - R_n(f) \right| \leq \frac{(b-a)^2}{2n} \cdot \|f'\|_\infty$

Méthode des trapèzes : Soit $f \in C^2([a,b],\mathbb{R})$. On pose $T_n(f) = \frac{b-a}{n}\left(\frac{f(a)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) + \frac{f(b)}{2} \right)$
alors $\left| \int_a^b f(t)\,dt - T_n(f) \right| \leq \frac{(b-a)^3}{12 n^2} \|f''\|_\infty$

Méthode de Simpson : Soit $f \in C^4([a,b],\mathbb{R})$,
On pose $S_n(f) = \frac{b-a}{6n}\left(f(a) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f\left(a + k \cdot \frac{b-a}{n}\right) + 4 \sum_{k=1}^{n} f\left(a + (2k-1)\frac{b-a}{2n}\right) + f(b) \right)$
alors $\left| \int_a^b f(t)\,dt - S_n(f) \right| \leq \frac{(b-a)^5}{2880\, n^4} \cdot \|f^{(4)}\|_\infty$

(II) Approximation d'une fonction par des polynômes

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$.

1) Cas d'un segment $I = [a,b]$: approximation uniforme

Soit (X,d) espace métrique compact

Lemme 13 : Soit $\mathcal{H} \subset \mathcal{C}(X,\mathbb{R})$ réticulée tq $\forall x_1, x_2 \in X$, $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, $\exists u \in \mathcal{H}$, $u(x_1)=\alpha_1$, $u(x_2)=\alpha_2$
alors $\mathcal{H}$ est dense dans $(\mathcal{C}(X,\mathbb{R}), \|.\|_\infty)$

Th de Stone-Weierstrass, cas réel : Soit A une sous algèbre unitaire de $\mathcal{C}(X,\mathbb{R})$ séparante, alors A est une partie dense de $(\mathcal{C}(X,\mathbb{R}), \|.\|_\infty)$

Coro 15 : Soit $f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$, alors f est limite uniforme de polynômes.

Appli 16 : **Th des moments** : Soit $f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ tq $\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_a^b f(t)t^n \, dt = 0$ alors $f = \tilde{0}$.

Appli 17 : $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ est séparable

Appli 18 : **Lemme de Riemann-Lebesgue** : Soit $f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$, alors $\lim\limits_{|n|\to\infty} \int_a^b f(x) e^{-inx} dx = 0$

DV (3) **Th 19** : Soit $f \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$. On définit $B_n(f) \in \mathbb{R}_n[x]$ par $\forall x \in [0,1]$, $B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \cdot \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$
alors $(B_n(f))$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$.

2) Cas d'un segment $I = [a,b]$: approximation en norme p.

Prop 20 : $\forall p \in [1;+\infty[$, $P([a,b],\mathbb{R})$ est une partie dense de $(\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}), \|.\|_p)$

DV (4) **Th de Müntz** : Soit (α_n) une suite strictement croissante de réels positifs.
Alors $V = \mathrm{Vect}\left((x \mapsto x^{\alpha_n})_{n\in\mathbb{N}}\right)$ est dense dans $(\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}), \|.\|_2) \iff \sum_{n\geq 0} \frac{1}{\alpha_n}$ diverge

Exple 21 : Soient $a, D \in \mathbb{N}^*$, $a \wedge D = 1$. On note p_n l'ensemble des nbs 1ers de la forme $a+kD$, $k \in \mathbb{N}$,
alors $V = \mathrm{Vect}((x \mapsto x^{p_n}))$ est une partie dense de $(\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}), \|.\|_2)$

3) Cas I quelconque.

Rq 22 : Si I non borné, f est limite uniforme de polynôme $\iff$ f est un polynôme.

Déf 23 : On appelle fonction de poids tte fonction mesurable $\rho : I \to \mathbb{R}_+^*$ tq $\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_I |x|^n \rho(x) dx < \infty$

Déf 24 : On note $\mathbb{L}^2(I,\rho)$ l'espace de Hilbert des fonctions $\mathbb{L}^2$ par rapport à la mesure $\rho\lambda$.

Prop 25 : Il existe une unique famille (P_n) de polynômes unitaires tq $\deg(P_n) = n$, formant une famille orthonormale de $\mathbb{L}^2(I,\rho)$, appelée famille des polynômes orthogonaux

DV (5) **Th 26** : Si $\exists a > 0$ tq $\int_I e^{a|x|} \rho(x) dx < \infty$, alors $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de $\mathbb{L}^2(I,\rho)$

Exple 27 : Pour $I = \mathbb{R}$, $\rho = e^{-x^2}$, (P_n) est la famille des polynômes de Hermite
On obtient alors une base hilbertienne de $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$

Exple 28 : Pour $I =]-1;1[$, $\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, (P_n) est la famille des polynômes de Tchebychev

III) Approximation d'une fonction par des polynômes trigonométriques

Soit $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ et $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$.

1) Analyse de Fourier

Déf 29 : On pose $\forall n \in \mathbb{Z}$, $e_n : x \mapsto e^{inx} \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$;

$P_n = \mathrm{Vect}(e_k)_{-n \leq k \leq n}$ le sev des polynômes trigonométriques d'indice n

$P = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} P_n$ l'espace vectoriel des polynômes trigonométriques.

Th de Stone-Weierstrass, cas complexe : Soit (X, d) espace métrique compact

Si A est une s/s algèbre unitaire de $\mathcal{C}(X, \mathbb{C})$ séparante, stable par conjugaison, alors A est une partie dense de $(\mathcal{C}(X, \mathbb{C}), \|.\|_\infty)$

Exple 31 : P est dense dans $(\mathcal{C}(\mathbb{T}), \|.\|_\infty)$. Par suite, $\forall p \in [1, \infty[$, P est dense ds $(\mathbb{L}^p(\mathbb{T}), \|.\|_p)$

Déf 32 : Soit $f \in \mathbb{L}^1(\mathbb{T})$. On définit $\forall n \in \mathbb{Z}$, $c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(x) e^{-inx}\,dx$ le $n^{ième}$ coef de Fourier

et $S_n(f) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f) e_k$ la série de Fourier de f.

2) Théorie $\mathbb{L}^2$ des séries de Fourier

Inégalité de Bessel : $\forall f \in \mathbb{L}^2(\mathbb{T})$, $c_n(f) = \langle f, e_n \rangle$ et $\|S_n(f)\|_2^2 = \sum_{k=-n}^{n} |c_k(f)|^2$

$S_n(f)$ est le projeté orthogonal de f sur P_n donc $\|f\|_2^2 = \|S_n(f)\|_2^2 + d(f, P_n)^2$

Formule de Parseval : $\forall f \in \mathbb{L}^2(\mathbb{T})$, $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2 = \|f\|_2^2$ ie $S_n(f) \xrightarrow[n \to \infty]{\|.\|_2} f$.

3) Approximation des fonctions continues

DV 6 **Th de Fejér** : Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$. On definit $\sigma_n(f) \in P_n$ par $\forall x \in \mathbb{T}$, $\sigma_n(f)(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{l=-k}^{k} c_l(f) e^{ilx}$

alors $(\sigma_n(f))$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{T}$.

Appli : **Critère de Weyl** : Soit $(u_n) \in [0,1]^{\mathbb{N}^*}$.

(u_n) est équirépartie (ie $\forall\, 0 \leq a < b \leq 1$, $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} |\{k \in [\![1, n]\!], u_k \in [a,b]\}| = \frac{b-a}{n}$)

$\iff \forall f \in \mathcal{C}([0,1], \mathbb{C})$, $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(u_k) = \int_0^1 f(t)\,dt$

$\iff \forall p \in \mathbb{Z}^*$, $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} e^{2i\pi p u_k} = 0$

Th de Fejér-Lebesgue : Soit $p \in [1, \infty[$ et $f \in \mathbb{L}^p(\mathbb{T})$ alors $\|\sigma_n(f)\|_p \leq \|f\|_p$ et $\sigma_n(f) \xrightarrow{\|.\|_p} f$

Th de convergence normale : Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T}) \cap \mathcal{C}^1_{mx}(\mathbb{T})$, alors $S_n(f) \xrightarrow{\|.\|_\infty} f$

Appli : **Formule sommatoire de Poisson** :

Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ tq $f(x) \underset{\pm\infty}{=} O\left(\frac{1}{x^2}\right)$ et $f'(x) \underset{\pm\infty}{=} O\left(\frac{1}{x^2}\right)$ alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(x + 2\pi n) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(n) e^{inx}$

4) Convergence ponctuelle

Th de Dirichlet : Soit $f \in \mathcal{C}^1_{mx}(\mathbb{T})$ alors $\forall x \in \mathbb{T}$, $\lim_{n \to \infty} S_n(f)(x) = f^*(x) = \frac{1}{2}\left(f(x^+) + f(x^-)\right)$

Déf 41 : La fonction $z \mapsto \frac{z}{e^z - 1}$ est DSE en 0. On pose $\forall z \in D(0, 2\pi)$, $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \cdot \frac{z^n}{n!}$

DV 7 **Appli 42** : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\zeta(2k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} = (-1)^{k-1} \frac{(2\pi)^{2k}}{2 \cdot (2k)!} \cdot b_{2k} \in \pi^{2k} \cdot \mathbb{Q}$.