Théorème du point fixe de Markov-Kakutani

Léo Gayral

2017-2018

ref : Testard – Analyse mathématique – p.429

Théorème 1. Soient $(E, ||.||)$ un espace euclidien et $G < GL(E)$ un sous-groupe compact.

Soit $K \neq \emptyset \subset E$ un convexe stable par G. Alors $\exists x \in K, \forall g \in G, g(x) = x$.

Démonstration.
Par compacité de G, pour $x \in K$ quelconque, l'orbite $G \cdot x$ est compacte. Quitte à restreindre K à $\overline{\text{conv}(G \cdot x)}$, on peut le supposer compact.

On pose $N(x) = \max\limits_{g \in G} ||g(x)||$, bien définie par continuité de $g \mapsto ||g(x)||$ sur $\mathcal{L}(E)$ et compacité de G. N définit clairement une norme sur E. En particulier, N est continue.

Soient $x, y \in E$ qui vérifient un cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire : il existe $g_0 \in G$ qui atteint le maximum dans $N(x+y) = ||g_0(x) + g_0(y)|| \leq ||g_0(x)|| + ||g_0(y)|| \leq N(x) + N(y)$. Par cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire de $||.||$, on en déduit que $g_0(x)$ et $g_0(y)$ sont positivement colinéaires ; g_0 étant inversible, il en va de même pour x et y.

On remarque enfin que N est invariante par l'action de G, car $N(g(x)) = \sup\limits_{h \in G} ||hg(x)|| = \sup\limits_{g' \in Gg} ||g'(x)|| = N(x)$. Par compacité de K, on considère $z \in K$ tel que $N(z) = \min\limits_{x \in K} N(x)$. Si ce z est unique, alors en particulier, comme $g(z) \in K$ et $N(z) = N(g(z))$, alors $z = g(z)$. Reste donc à montrer l'unicité. Elle est directe si $N(z) = 0$.

Considérons donc $y \in K$ tel que $N(y) = N(z) > 0$. On a en particulier $N(y) = N(z) \leq N\left(\frac{y+z}{2}\right)$ donc $N(y) + N(z) \leq 2N\left(\frac{y+z}{2}\right) = N(y+z)$. Par le cas d'égalité précédent, on a y et z positivement colinéaires, $y = \lambda z$ par exemple. Mais alors $N(y) = N(\lambda z) = \lambda N(z) = \lambda N(y)$, d'où $\lambda = 1$ et $y = z$. $\square$

Application 1. Soit $G < GL_n(\mathbb{R})$ un sous-groupe compact. Alors G est un sous-groupe du groupe d'isométries d'un espace quadratique euclidien $(\mathbb{R}^n, S)$, et est conjugué à un sous-groupe de $O_n(\mathbb{R})$.

Démonstration.
Soit $\rho : G \to GL\left(S_n(\mathbb{R})\right)$ défini par $\rho(A) : S \mapsto ASA^T$, qui correspond au changement de base A sur la forme quadratique S. On remarque en particulier que :

$$\rho(A)\left[\rho(B)S\right] = A\left(BSB^T\right)A^T = (AB)S(AB)^T = \rho(AB)S$$

donc ρ est un morphisme de groupes, qui induit une action $G \overset{\rho}{\curvearrowright} S_n(\mathbb{R})$.

On considère $E = \left\{AA^T = \rho(A)I_n, A \in G\right\}$ l'orbite de l'identité sous l'action précédente, stable par le groupe $\rho(G)$. Par continuité, c'est un compact de $S_n^{++}(\mathbb{R})$. En particulier, $K = \operatorname{conv}(E)$ un compact convexe, stable par $\rho(G)$. Par le théorème de Kakutani-Markov, il existe donc $S \in K \subset S_n^{++}(\mathbb{R})$ invariant par $\rho(G)$.

Comme $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, c'est la matrice d'une forme quadratique définie positive, qui induit une norme euclidienne $N(x) = xSx^T$ pour le vecteur ligne $x \in \mathbb{R}^n$. Dans ce cas, pour $A \in G$, on a $N(xA) = xASA^Tx^T = xSx^T = N(x)$, donc $G < \operatorname{Isom}(\mathbb{R}^n, N) = \left\{M \in M_n(\mathbb{R}), MSM^T = M\right\} \cong O_n(R)$.

De façon plus explicite, S admet une (unique) racine $R \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. Autrement dit, pour tout $A \in G$, on a $AR^2A^T = R^2$, donc $\left(R^{-1}AR\right)\left(R^{-1}AR\right)^T = I_n$ et donc $R^{-1}AR \in O_n(\mathbb{R})$. Autrement dit, $G < RO_n(\mathbb{R})R^{-1}$, c'est-à-dire le résultat voulu. $\square$