Dév. 15 — Algorithme d'Edmonds-Karp

Leçons 925 Graphes : représentations et algorithmes
926 Analyse des algorithmes : complexité. Exemples

Réf : Cormen

Théorème : l'algorithme d'Edmonds-Karp calcule un flot maximal sur $G=(V,E)$ en temps $O(|V|\times|E|^2)$.

Rappel : Méthode de Ford-Fulkerson (G,s,t) :

initialiser, pour $(u,v)\in E$:
$f[u,v] = f[v,u] = 0$
Tant qu'il existe un chemin $p : s \to t$ dans le graphe résiduel G_f :
$c \leftarrow \min\{c(u,v)-f(u,v),\ (u,v)\in p\}$
pour $(u,v)\in p$,
$f[u,v] \leftarrow f[u,v] + c$
$f[v,u] \leftarrow -f[u,v]$

Comment le trouver efficacement ?

Edmonds-Karp : Recherche d'un chemin augmentant en BFS.

Lemme 1. Pour tout $v\in V\setminus\{s,t\}$, la distance $d_f(s,v)$ dans G_f ~~[illegible]~~ augmente à chaque itération.

Supp. $\exists v \in V\setminus\{s,t\}$ t.q. la dist. du plus court chemin de s à v ↓ lors d'une ↗ du flot.
Soit f le flot juste avant, f' le flot juste après.
On peut supposer que v est le sommet tel que $d_{f'}(s,v) < d_f(s,v)$ qui minimise $d_{f'}(s,v)$, avec $p : s \to v$ un chemin minimal, et u l'avant-dernier sommet :

$$p : s \dashrightarrow u \to v,$$

$$d_{f'}(s,u) = d_{f'}(s,v) - 1 \qquad (*)$$

Par ailleurs, vu le choix de v, $d_{f'}(s,u) \geq d_f(s,u)$. $\qquad (**)$

→ Or, si $(u,v)\in G_f$, $d_f(s,v) \leq d_f(s,u)+1 \leq d_{f'}(s,u)+1 = d_{f'}(s,v)$, contradiction ;

→ et si $(u,v)\notin G_f$, alors que $(u,v)\in G_{f'}$, c'est que le flot $v\to u$ a été augmenté.
Comme EK augmente le flot le long de plus courts chemins, le plus court chemin $s\to u$ a v pour avant-dernier sommet (dans G_f) :

$$d_f(s,v) = d_f(s,u) - 1 \underset{(**)}{\leq} d_{f'}(s,u) - 1 \underset{(*)}{=} d_{f'}(s,v) - 2$$

ce qui contredit $d_f(s,v) > d_{f'}(s,v)$. $\square$

Lemme 2. L'algorithme d'E-K réalise au plus $O(|V|\times|E|)$ augmentations du flot.

Pour un chemin p de G_f, une arête est critique si sa capacité résiduelle est minimale sur p. Après augmentation du flot le long de p, toutes les arêtes critiques disparaissent de G_f.

Soit $(u,v) \in E$. Quand (u,v) est critique pour la première fois, $d_f(s,v) = d_f(s,u)+1$.

(u,v) disparaît alors de G_f et ne peut y réapparaître que si on augmente le flot le long de (v,u).
Si le flot est alors f', $d_{f'}(s,u) = d_{f'}(s,v)+1$.

Le lemme 1 donne $d_f(s,v) \leq d_{f'}(s,v)$, donc

$d_{f'}(s,u) = d_{f'}(s,v)+1 \geq d_f(s,v)+1 = d_f(s,u)+2$.

Ainsi, de f à f', la distance de s à u augmente au moins de 2,
de sorte que (u,v) peut devenir critique au plus $|V|/2$ fois,
donc au plus $\frac{|E||V|}{2} = \Theta(|E||V|)$ arêtes deviennent critiques (avec répétition) au cours de l'exécution.
Or il y a au moins une nouvelle arête critique par itération. $\square$

La recherche étant en BFS, chaque itération de E-K se fait en temps $O(|E|)$, d'où le résultat.