Dév. 5. Existence d'une forme normale par le typage du λ-calcul

Leçons 923 Analyse lexicale et syntaxique
929 λ-calcul pur comme modèle de calcul

Réf : Sørensen
Baader & Nipkow

Théorème (admis) :

On définit inductivement les types par $T ::= \mathcal{V} \mid T \to T$, où $\mathcal{V}$ est un ensemble dénombrable de variables de type.
On définit les assertions de type par

$$\frac{\sigma \in \mathcal{V}}{\Gamma, x:\sigma \vdash x:\sigma} \qquad \frac{\Gamma, x:\sigma \vdash t:\tau}{\Gamma \vdash (\lambda x.t):\sigma \to \tau} \qquad \frac{\Gamma \vdash t_1 : \sigma \to \tau \quad \Gamma \vdash t_2 : \sigma}{\Gamma \vdash (t_1 t_2) : \tau}$$

Alors s'il existe Γ, σ tels que $\Gamma \vdash t : \sigma$, t est fortement normalisant.

Donc on s'intéresse à la "typabilité" des λ-termes.

Pour tout terme t, construisons inductivement un ensemble d'égalités E_t et un "type" τ_t :

→ $E_x = \{\}$, $\tau_x = \alpha_x$ où $\alpha_x \in \mathcal{V}$ est une nouvelle variable

→ $\tau_{t_1 t_2} = \alpha$ une nouvelle variable, $E_{t_1 t_2} = E_{t_1} \cup E_{t_2} \cup \{\tau_{t_1} = \tau_{t_2} \to \alpha\}$

→ $E_{\lambda x.t} = E_t$, $\tau_{\lambda x.t} = \alpha_x \to \tau_t$.

Prop : Si $\Gamma \vdash t : \sigma$, alors il existe un unificateur $\mathcal{U}$ de E_t avec $\begin{cases} \sigma = \mathcal{U}(\tau_t) \\ \mathcal{U}(\alpha_x) = \Gamma(x) \end{cases}$ pour tout x dans $FV(t)$

Si $\mathcal{U}$ est un unificateur de E_t, alors il existe Γ tel que $\Gamma \vdash t : \mathcal{U}(\tau_t)$, avec $\Gamma(x) = \mathcal{U}(\alpha_x)$ pour x libre dans t

Preuve : Par induction sur t.

■ $t = x$.

→ Si $\Gamma \vdash x:\sigma$, alors $\Gamma(x) = \sigma$.
$E_x = \{\}$ unifié par $\mathcal{U} : \alpha_x \mapsto \sigma$, ça marche.

→ Si $\mathcal{U}$ unifie $E_x = \{\}$, $\tau_t = \alpha_x$ donc $\mathcal{U}(\tau_t) = \mathcal{U}(\alpha_x) = \sigma$, et $x:\sigma \vdash x:\sigma$.

■ $t \equiv t_1 t_2$.

→ si $\Gamma \vdash t_1 t_2 : \sigma$ alors $\Gamma \vdash t_1 : \sigma_2 \to \sigma$
$\Gamma \vdash t_2 : \sigma_2$ pour un certain σ_2.

Par induction on a U_1 unifiant E_{t_1} t.q. $\sigma_2 \to \sigma = U_1(\tau_{t_1})$ et $U_1(\alpha_x) = \Gamma(x)$ pour x...
U_2 " E_{t_2} " $\sigma_2 = U_2(\tau_{t_2})$ " $U_2(\alpha_x) = \Gamma(x)$ "

On cherche U unifiant $E_{t_1} \cup E_{t_2} \cup \{\tau_{t_1} = \tau_{t_2} \to \alpha\}$ t.q. (...)
Pour $x \in FV(t)$, $U(\alpha_x) := U_1(\alpha_x)$ ou $U_2(\alpha_x)$, selon ce qui est défini (pas de collision possible : $U_1(\alpha_x) = \Gamma(x) = U_2(\alpha_x)$!)

et $U(\alpha) := \sigma$. Alors U unifie E_{t_1}, E_{t_2}, et et $U(\tau_{t_1}) = \sigma_2 \to \sigma$
$U(\tau_{t_2}) = \sigma_2$
$U(\alpha) = \sigma$!

→ si U unifie $E_{t_1 t_2}$, alors en particulier U unifie E_{t_1} et E_{t_2},
donc $\Gamma_1 \vdash t_1 : U(\tau_{t_1})$ avec $\Gamma_1 \supseteq \{x : U(\alpha_x),\ x \in FV(t_1)\}$. $(*)$
$\Gamma_2 \vdash t_2 : U(\tau_{t_2})$ avec $\Gamma_2 \supseteq \{x : U(\alpha_x),\ x \in FV(t_2)\}$ $(**)$

En outre U unifie $\{\tau_{t_1} = \tau_{t_2} \to \alpha\}$ donc $\Gamma_1 \vdash t_1 : U(\tau_{t_2}) \to U(\alpha)$.
En outre, en prenant un "bon" σ dans les règles (ax) des dérivations $(*)$ et $(**)$, et en posant $\Gamma_{1\cup 2} = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$,

$$\frac{\Gamma_{1\cup 2} \vdash t_1 : U(\tau_{t_2}) \to U(\alpha) \qquad \Gamma_{1\cup 2} \vdash t_2 : U(\tau_{t_2})}{\Gamma_{1\cup 2} \vdash t_1 t_2 : U(\alpha)}$$

et $\Gamma_{1\cup 2} \supseteq \{x : U(\alpha_x),\ x \in FV(t)\}$.

■ $t \equiv \lambda x. t_1$

→ si $\Gamma \vdash \lambda x. t_1 : \sigma$, alors σ est $\sigma_x \to \sigma_1$ et $\Gamma, x : \sigma_x \vdash t_1 : \sigma_1$.
Par induction, il existe un unificateur U de E_{t_1} avec $\sigma_1 = U(\tau_{t_1})$
et $\begin{cases} U(\alpha_y) = \Gamma(y) \text{ pour } y \neq x \text{ libre dans } t_1 \\ U(\alpha_x) = \sigma_x \end{cases}$.

Alors $U(\tau_{\lambda x. t_1}) = U(\alpha_x \to \tau_{t_1}) = \sigma_x \to \sigma_1$, U convient.

→ si U unifie $E_{\lambda x. t_1}$, alors U unifie E_{t_1} et il existe Γ t.q.
$\Gamma \vdash t_1 : U(\tau_{t_1})$ avec $\Gamma(y) = U(\alpha_y)$ pour y libre dans t_1.

si $x \in \mathrm{dom}\,\Gamma$, $\Gamma = \Gamma', x : U(\alpha_x) \vdash t_1 : U(\tau_{t_1})$

$$\frac{\Gamma', x : U(\alpha_x) \vdash t_1 : U(\tau_{t_1})}{\Gamma' \vdash \lambda x. t_1 : U(\alpha_x) \to U(\tau_{t_1})} = U(\tau_{\lambda x. t_1})$$

si $x \notin \mathrm{dom}\,\Gamma$, en ajoutant ", $x : U(\alpha_x)$" partout dans l'arbre de dérivation, on obtient ce qu'on veut aussi. □

On n'a donc qu'à poser un coup d'unification sur les contraintes qu'on a générées !
si on trouve un unificateur, c'est fortement normalisant.