DÉV. 9 — Les fonctions récursives primitives sont λ-définissables

Leçons 912 Fonctions récursives primitives et non primitives
929 λ-calcul comme modèle de calcul.

Réf : Lassaigne-De Rougemont, Barendregt, Odifreddi

Théorème : les fonctions récursives sont λ-définissables, i.e. pour f récursive, il existe $\overline{f}$ tq $\forall x_1 \dots x_k \in \mathbb{N}$, $\overline{f} \ulcorner x_1 \urcorner \dots \ulcorner x_k \urcorner = \ulcorner f(x_1 \dots x_k) \urcorner$.

(1) Les fonctions de base sont λ-définissables :

- $\overline{0} = \lambda x. \ulcorner 0 \urcorner$.
- $\overline{succ} = succ = \lambda x. \lambda f y. x f (f y)$.
- $\overline{\pi_i^n} = \lambda x_1 \dots x_n . x_i$

(2) Si $f(x_1 \dots x_n) = h(g_1(x_1 \dots x_n), \dots, g_k(x_1 \dots x_n))$ où $h, g_1, \dots, g_k$ sont primitives récursives (donc totales),
alors $\overline{f} = \lambda x_1 \dots x_n . \overline{h}\,(\overline{g_1}\, x_1 \dots x_n) \dots (\overline{g_k}\, x_1 \dots x_n)$ convient.

(3) Si $\begin{cases} f(x_1 \dots x_n, x+1) = g(x_1 \dots x_n, x, f(x_1 \dots x_n, x)) \\ f(x_1 \dots x_n, 0) = h(x_1 \dots x_n) \end{cases}$ où f et g sont primitives récursives, on veut que $\overline{f}(x_1 \dots x_n, \cdot)$ soit un point fixe de

$$\lambda \varphi\, \lambda x.\ \text{if } (x=0) \text{ then } (\overline{h}\, x_1 \dots x_n) \text{ else } (\overline{g}\, x_1 \dots x_n (\text{pred } x)(\varphi\, (\text{pred } \overline{x})))$$

or on a Θ t.q. $\forall T \in \Lambda$, $\Theta T \to T(\Theta T)$.
on prend $\overline{f} = \lambda x_1 \dots x_n . \Theta(\dots)$.

<u>À ce stade, on a montré que les fonctions récursives primitives sont λ-définissables.</u>

(4) Si $f(x_1 \dots x_n) = \mu_z(g(x_1 \dots x_n, z))$, on veut $\begin{cases} \overline{f}\, x_1 \dots x_n z = z & \text{si } \overline{g}\, x_1 \dots x_n z = 0 \\ \overline{f}\, x_1 \dots x_n z = \overline{f}\, x_1 \dots x_n (z+1) & \text{sinon} \end{cases}$

À nouveau on cherche un point fixe de

$$\lambda \varphi . \lambda z.\ \text{if } (\overline{g}\, x_1 \dots x_n z = 0) \text{ then } z \text{ else } (\varphi\, (\text{succ } z)).$$

et on veut le plus petit z, donc on applique à 0 :
$\overline{f} = \lambda x_1 \dots x_n . \Theta(\dots) 0$.

(5) Lemme (admis) : il existe une fonction primitive récursive U et des prédicats primitifs récursifs $(P_i)_{i \in \mathbb{N}}$ d'arité n, t.q.
$\forall f$ récursive, $\exists e \in \mathbb{N}$, $f(x_1 \dots x_n) = U(\mu_y P_n(e, x_1 \dots x_n, y))$

En outre $\mathcal{U}$ diverge (donc $\overline{\mathcal{U}}$ diverge) ssi son entrée diverge.

De sorte que :

$$
\begin{aligned}
f \text{ diverge sur } x_1 - x_n \quad &\Rightarrow \quad \mathcal{U}(\mu_y(\ldots)) \text{ diverge sur cette entrée} \\
&\Rightarrow \quad \mu_y(\ldots) \text{ diverge} \quad " \quad " \quad " \\
&\Rightarrow \quad \overline{\mu_y(\ldots)} \text{ diverge} \quad " \quad " \quad " \\
&\Rightarrow \quad \overline{f} = \mathcal{U}(\overline{\mu_y(\ldots)}) \text{ diverge.} \quad " \quad " \quad "
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f \text{ converge sur } x_1 - x_n \quad &\Rightarrow \quad f(x_1 - x_n) = \mathcal{U}(\mu_y(\ldots)) \\
&\quad\;\; \text{et } \overline{f} = \mathcal{U}(\overline{\mu_y(\ldots)}).
\end{aligned}
$$

$\square$