Dév. 1 — Isométries et déplacements du tétraèdre et du cube

Leçons 104 Groupes finis
105 Groupe symétrique
183 Utilisation des groupes en géométrie

Rappels : Une isométrie affine préserve les distances et les barycentres.
Elle se décompose en un produit de réflexions et de rotations (non unique) ; la parité du nombre de réflexions est fixe (invariant : le dét. de la partie linéaire), si il est pair on dit que c'est un déplacement.

Thm : Dans un esp. affine réel de dim. 3, le groupe des isométries préservant un tétraèdre régulier est isomorphe à $\mathfrak{S}_4$; le groupe des déplacements est isomorphe à $\mathfrak{A}_4$.
Le groupe des isométries préservant un cube est isomorphe à $\mathfrak{S}_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

T=ABCD un tétraèdre régulier. Is(T) les isométries qui le préservent.

1. Pourquoi c'est un groupe ?

C'est un sous-groupe des isométries affines du plan :
→ stabilité par composition
→ stabilité par inversion.

2. $Is(T) \simeq \mathfrak{S}_4$.

Une isom. préserve T ssi elle préserve $\{A,B,C,D\}$: $\begin{cases} \Rightarrow \text{ préserve les (plus gdes) dist.} \\ \Leftarrow \text{ préserve les barycentres} \end{cases}$

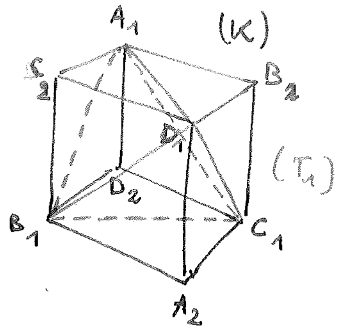
d'où un morph. $\phi : Is(T) \to \mathfrak{S}_{\{A,B,C,D\}} \simeq \mathfrak{S}_4$.

Mq. c'est un isom. :

* injectivité. $f \in Is(T)$, $\phi(f) = id$, donc $f(A)=A$, $f(B)=B$, etc.
f préserve les barycentres, donc f préserve tout point, donc $f = id$.
* surjectivité. Mq $\phi(Is(T))$ contient les transpositions, qui engendrent $\mathfrak{S}_4$.
la symétrie par rapport au plan médiateur de [AB] :
- est une isométrie
- envoie $A \mapsto B$, $B \mapsto A$, $C \mapsto C$, $D \mapsto D$ donc elle préserve T et $\phi(\text{cette symétrie}) = (A\ B)$.

le un cube.

3. $Is(K) \simeq \mathfrak{S}_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.



Remarquons que K contient deux tétraèdres réguliers $T_1 = A_1B_1C_1D_1$ et $T_2 = A_2B_2C_2D_2$

$$f \in Is(K) \Rightarrow \begin{cases} (i) & f(T_1)=T_1\ ,\ f(T_2)=T_2 \\ (ii) & f(T_1)=T_2\ ,\ f(T_2)=T_1 \end{cases}.$$

En notant O le centre du cube, s_0 la symétrie par rapport à O ($s_0 \in Is(K)$), posons

$$\psi : Is(K) \to \mathfrak{S}_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$
$$f \mapsto \begin{cases} (\phi(f),0) & \text{si } f \text{ vérifie (i)} \\ (\phi(f\circ s_0),1) & \end{cases}$$ où ϕ est comme déf. précédemment sur T_1.

Remarquons que s_0 commute avec tout $f \in Is(K)$: en vectorialisant en O, $s_0 = -id$, qui commute avec tout le monde puisque les éléments de f deviennent des isom. linéaires.

* ψ est un morph. de groupes. $f, g \in Is(K)$.
  f est (i), g est (ii) : $f\circ g$ est (ii), et $\psi(f\circ g) = (\phi(f\circ g\circ s_0),1) = (\phi(f)\phi(g\circ s_0), 0+1)$
  $= \psi(f)\psi(g)$

  idem pour les autres cas possibles.
* ψ est bijectif. f est entièrement déterminé par ses valeurs sur T_1 (qui constitue un repère de l'esp. affine), qui sont données par $\psi(f)$ et inversement.

4. Les déplacements

Si l'on fixe $s \in Is^-(T)$, alors la composition par s donne un isom. $Is^+(T) \simeq Is^-(T)$ donc $Is^+(T)$ est d'indice 2, de même $Is^+(K)$ est d'indice 2.

* le seul sg d'indice 2 de $\mathfrak{S}_4$ est $\mathfrak{A}_4$ donc $Is^+(T) \simeq \mathfrak{A}_4$.
* la rotation d'angle π autour de la droite passant par les milieux de $[A_1B_2]$ et $[A_2B_1]$ envoie $[A_1,A_2]$ sur $[B_1,B_2]$,
  $[B_1,B_2]$ sur $[A_1,A_2]$,
  $[C_1,C_2]$ sur $[C_1,C_2]$,
  $[D_1,D_2]$ sur $[D_1,D_2]$ donc "simule" $(A\ B)$,
  on peut à nouveau construire $\mathfrak{S}_4$ dans $Isom^+(K)$,
  donc $Is^+(K)$ est d'indice 2 dans $\mathfrak{S}_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et contient $\mathfrak{S}_4$, ie $Is^+(K) \simeq \mathfrak{S}_4$.