On note $\mathcal{F}_0(\mathcal{P})$ l'ensemble des *formules du calcul propositionnel* sur $\mathcal{P}$, $\mathcal{I}(\varphi) \coloneqq \{I \in \{\mathbf{0},\mathbf{1}\}^{\mathcal{P}} \mid I \models \varphi\}$ l'ensemble des *modèles* d'une formule $\varphi \in \mathcal{F}_0(\mathcal{P})$.

Théorème 1. Soit $S \subseteq \mathcal{F}_0(\mathcal{P})$ un ensemble de formules du calcul propositionnel. Alors S est insatisfiable si et seulement si S contient un sous-ensemble fini insatisfiable.

Preuve. $\{\mathbf{0},\mathbf{1}\}$ est compact pour sa topologie (finie) discrète $2^{\{\mathbf{0},\mathbf{1}\}}$. D'après le théorème de Tykhonov, $\{\mathbf{0},\mathbf{1}\}^{\mathcal{P}}$ est compact pour la topologie produit T. Par induction structurelle sur $\mathcal{F}_0(\mathcal{P})$, on voit facilement que l'ensemble $\mathcal{I}(\varphi)$ des interprétations satisfaisant une formule φ est un ouvert fermé de $\{\mathbf{0},\mathbf{1}\}^{\mathcal{P}}$:

- $\mathcal{I}(\bot) = \varnothing \in T$ et $\mathcal{I}(\bot)^{\complement} = \{\mathbf{0},\mathbf{1}\}^{\mathcal{P}} \in T$,
  $\mathcal{I}(p) = \{\mathbf{1}\} \times \prod_{q \neq p} \{\mathbf{0},\mathbf{1}\} \in T$ et $\mathcal{I}(p)^{\complement} = \{\mathbf{0}\} \times \prod_{q \neq p} \{\mathbf{0},\mathbf{1}\} \in T$ pour tout $p \in \mathcal{P}$,
- Si $\mathcal{I}(\phi)$ et $\mathcal{I}(\psi)$ sont des ouverts fermés de $\{\mathbf{0},\mathbf{1}\}^{\mathcal{P}}$, alors $\mathcal{I}(\neg\phi) = \mathcal{I}(\phi)^{\complement}$ et $\mathcal{I}(\phi \vee \psi) = \mathcal{I}(\phi) \cup \mathcal{I}(\psi)$ sont bien des ouverts fermés de $\{\mathbf{0},\mathbf{1}\}^{\mathcal{P}}$.

Supposons que S est insatisfiable. Ceci s'écrit : $\bigcap_{\varphi \in S} \mathcal{I}(\varphi) = \varnothing$. D'après la propriété de Borel-Lebesgue (contraposée pour les fermés), on peut extraire de cette intersection vide de fermés une sous-intersection vide finie. Il existe donc un sous-ensemble fini $S' \subseteq S$ tel que $\cap_{\varphi \in S'} \mathcal{I}(\varphi) = \varnothing$, c'est-à-dire tel que S' est insatisfiable. (Le sens réciproque est évident.) ∎

Application 2 (Pavages)**.** Soient $\mathcal{T}$ un ensemble fini de tuiles et $H, V \subseteq \mathcal{T}^2$. On dit qu'une partie $\mathcal{E}$ du plan $\mathbf{Z}^2$ peut être pavée par $\mathcal{T}$ s'il existe une application $f\colon \mathcal{E} \to \mathcal{T}$ telle que, pour tout $(m,n) \in \mathcal{E}$,

1. $(m+1,n) \in \mathcal{E} \implies (f(m,n), f(m+1,n)) \in H$ (compatibilité horizontale),
2. $(m,n+1) \in \mathcal{E} \implies (f(m,n), f(m,n+1)) \in V$ (compatibilité verticale).

Alors $\mathbf{Z}^2$ peut être pavé par $\mathcal{T}$ si et seulement si tous les carrés $[\![-n,n]\!]^2$, $n \in \mathbf{N}$, peuvent être pavés par $\mathcal{T}$.

Preuve. Pour un point $(i,j) \in \mathbf{Z}^2$, soient $h(i,j) \coloneqq (i,j+1)$ et $d(i,j) \coloneqq (i+1,j)$ respectivement ses voisins de haut et de droite. Pour tout $\mathcal{E} \subseteq \mathbf{Z}^2$, soit l'ensemble $S_{\mathcal{E}} \subseteq \mathcal{F}_0(\mathcal{P})$ de formules sur $\mathcal{P} \coloneqq \mathbf{Z}^2 \times \mathcal{T}$ défini par :

$$S_{\mathcal{E}} \coloneqq \left\{ \left(\bigvee_{t \in \mathcal{T}} (c,t) \right) \wedge \neg \left(\bigvee_{\{t \neq t'\} \subseteq \mathcal{T}} [(c,t) \wedge (c,t')] \right) \;\middle|\; c \in \mathcal{E} \right\}$$
$$\bigcup \left\{ \bigvee_{(t,t') \in H} [(c,t) \wedge (c',t')] \;\middle|\; c \in \mathcal{E},\ c' = d(c) \right\} \bigcup \left\{ \bigvee_{(t,t') \in V} [(c,t) \wedge (c',t')] \;\middle|\; c \in \mathcal{E},\ c' = h(c) \right\}.$$

Clairement, $\mathcal{E}$ peut être pavé par $\mathcal{T}$ si et seulement si $S_{\mathcal{E}}$ est satisfiable. Par le théorème de compacité, $\mathbf{Z}^2$ peut donc être pavé par $\mathcal{T}$ si et seulement si tout sous-ensemble fini de $S_{\mathbf{Z}^2}$ est satisfiable. Comme chacun de ces sous-ensembles est inclus dans un certain $S_{[\![-n,n]\!]^2}, n \in \mathbf{N}$, on conclut que $\mathbf{Z}^2$ peut être pavé par $\mathcal{T}$ si et seulement si tous les carrés $[\![-n,n]\!]^2, n \in \mathbf{N}$, peuvent être pavés par $\mathcal{T}$. ∎

Application 3 (Coloriage d'un graphe)**.** Soient $G = (V,E)$ un graphe et $k \geqslant 1$. Alors G est coloriable avec k couleurs si et seulement si chacun de ses sous-graphes finis est coloriable avec k couleurs.

Preuve. Soit l'ensemble $S \subseteq \mathcal{F}_0(\mathcal{P})$ de formules sur $\mathcal{P} \coloneqq V \times [\![1,k]\!]$ défini par :

$$S \coloneqq \left\{ \left(\bigvee_{i=1}^{k} (x,i) \right) \wedge \neg \left(\bigvee_{1 \leqslant i < j \leqslant k} [(x,i) \wedge (x,j)] \right) \;\middle|\; x \in V \right\} \bigcup \left\{ \neg \left(\bigvee_{i=1}^{k} [(x,i) \wedge (y,i)] \right) \;\middle|\; (x,y) \in E \right\}.$$

G est coloriable avec k couleurs si et seulement si S est satisfiable, donc si et seulement si tout sous-ensemble fini de S est satisfiable, c'est-à-dire si et seulement si tout sous-graphe fini de G est coloriable avec k couleurs. ∎

Références. [CL, GLM]

916 Formules du calcul propositionnel : représentation, formes normales, satisfiabilité. Applications.

[CL] Hubert Comon-Lundh : Cours de logique et calculabilité. *http://www.lsv.ens-cachan.fr/~comon/Logique1/*.

[GLM] Jean Goubault-Larrecq et Ian Mackie : *Proof Theory and Automated Deduction*.