Dév. 16 – 2-SAT est dans P, NP-complétude de CLIQUE

Leçons 915 Classes de complexité
916 Formules du calcul propositionnel
925 Graphes
928 NP-complétude

Réf : Cormen, Bob, Papadimitriou

Théorème 1. CLIQUE est NP-complet.

→ Clique est dans NP : la donnée de la clique est un certificat.

→ Réduction depuis 3-SAT.

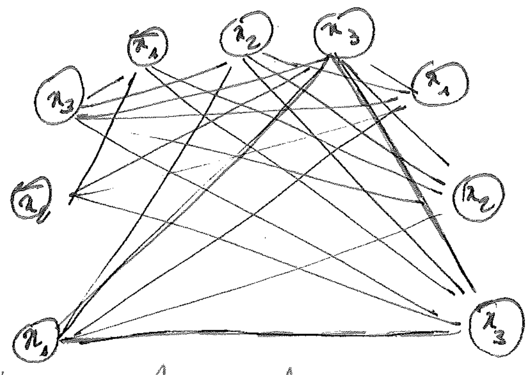
Soit $\phi = C_1 \wedge \dots \wedge C_k$, et $C_i = l^i_1 \vee l^i_2 \vee l^i_3$.

Pour C_i, on crée des sommets l^i_j, et on relie l^i_j et $l^{i'}_{j'}$ si :

et $i \neq i'$, $l^i_j \neq \overline{l^{i'}_{j'}}$.

C'est une construction polynomiale.

Exemple : $(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3) \wedge (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee x_3)$



(x_1, x_3, x_3) est une 3-clique.

Si ϕ est satisfiable, chaque C_i contient un l^i_j assigné à vrai, ces l^i_j constituent une k-clique.

S'il y a une k-clique, assignons les sommets correspondant à vrai. C'est possible car deux sommets reliés sont consistants. On obtient bien un vrai par clause. □

Théorème 2 : 2-SAT $\in P$.

Soit ϕ une formule de 2-SAT. Les clauses sont $(\alpha \vee \beta)$, équivalente à $\neg\alpha \Rightarrow \beta$ ou $\neg\beta \Rightarrow \alpha$.

On crée alors un graphe $G(\phi)$ dont les sommets sont les variables de ϕ et leurs négations, et dont les arêtes sont les $\neg\alpha \to \beta$ et $\neg\beta \to \alpha$ pour toute clause $(\alpha \vee \beta)$.

On montre alors que ϕ est insatisfiable ssi il existe x telle que $G(\phi)$ contient des chemins $x \to \bar{x}$ et $\bar{x} \to x$.

$\Leftarrow$ Est immédiat.

$\Rightarrow$ Construisons une valuation (i.e. une valuation des sommets telle qu'aucune arête ne va de $\top$ vers $\bot$) :

Tant qu'il y a des sommets non valués,

Prenons-en un (α) tel qu'il n'y a pas de chemin $\alpha \to \bar{\alpha}$, c'est possible par hyp.
Assignons-lui la valeur VRAI, ainsi qu'à tous les sommets atteignables depuis α.
Assignons FAUX aux négations de ces sommets

Ces assignations sont bien définies : s'il y avait des chemins $\begin{matrix}\alpha \to \beta \\ \alpha \to \bar{\beta}\end{matrix}$ alors par symétrie (contraposition) il y aurait des chemins $\begin{matrix}\bar{\beta} \to \bar{\alpha} \\ \beta \to \bar{\alpha}\end{matrix}$, donc $\alpha \to \bar{\alpha}$.

On obtient bien une valuation du graphe, or celui rend compte (deux fois !) de toutes les contraintes logiques portées par ϕ, donc on a une valuation satisfaisant ϕ.

Cette procédure de décision est polynomiale.

$\square$

Raffinement : 2-SAT est NL-complet.

→ 2-SAT ∈ NL : Pour tester si une formule 2-CNF est insatisfiable, on parcourt V et on teste, pour tout x, l'existence d'un chemin $x \to \bar{x}$, ce qui se fait en espace logarithmique (PATH ∈ NL), donc 2-SAT ∈ co-NL, or coNL = NL.

→ Via la même construction, $\overline{\text{PATH}}$ pour les graphes acycliques (c'est aussi NL-complet) se réduit à 2-SAT : étant donnés (G, s, t),

$$\phi_G = \bigwedge_{(u,v) \in G} (\bar{u} \vee v) \wedge s \wedge \neg t,$$

satisfiable ssi il n'y a pas de chemin $s \to t$.

$\square$