leçons :
101 : Groupe opérant sur un ensemble.
103 : Exemples et applications des notions de sous-groupe distingué et de groupe quotient
104 : groupes finis. Exemples et applications.
190 : méthodes combinatoires, pb de dénombrement

Théorèmes de Sylow

38

Références :
PERRIN

Thm : Soit p un nombre premier et G un groupe fini de cardinal $n = |G| = p^\alpha m$ avec $p \nmid m$, $\alpha \geq 1$. Alors

(i) G contient au moins un p-Sylow (on note alors n_p le nombre de p-Sylow de G)

(ii) Les p-Sylow sont tous conjugués (et tout conjugué d'un p-Sylow est un p-Sylow !)

(iii) $n_p \equiv 1 \pmod p$

(iv) $n_p \mid m$

Corollaire de (ii) : S un p-Sylow de G. Alors S est distingué ssi S est l'unique p-Sylow de G.

preuve :

① Cas particulier de $G = GL_n(\mathbb{F}_p)$:

On pose $H = \{ (a_{ij}) \mid \forall i > j \ a_{ij} = 0, \forall i \ a_{ii} = 1 \}$, H sous groupe de G.

$$\left.\begin{array}{l} |G| = (p^n - 1)\cdots(p^n - p^{n-1}) = p^{\frac{n(n-1)}{2}} m \quad \text{avec } p \nmid m \\ |H| = p^{\frac{n(n-1)}{2}} \end{array}\right\} H \ p\text{-Sylow de } G$$

② lemme clé : H sous-groupe de G, S p-Sylow de G
Alors il existe $a \in G$ tel que $aSa^{-1} \cap H$ est un p-Sylow de H.

preuve du lemme clé : Soit $a \in G$

G agit sur G/S par translation à gauche et $\mathrm{Stab}_G(aS) = aSa^{-1}$

On peut restreindre cette action à H et dans ce cas : $\mathrm{Stab}_H(aS) = (aSa^{-1}) \cap H$

$$\forall a \in G \quad (aSa^{-1}) \cap H \ p\text{-Sylow de } H \iff \left| \frac{H}{(aSa^{-1}) \cap H} \right| \wedge p = 1$$

Formule des classes pour l'action de H (R ensemble de représentants) : $|G/S| = \sum_{a \in R} |\mathrm{Orb}(aS)| = \sum_{a \in R} \left| \frac{H}{(aSa^{-1}) \cap H} \right|$

$|G/S| \wedge p = 1$ par hypothèse donc il existe $a \in R \subset G$ tq $H \cap (aSa^{-1})$ est un p-Sylow de H

③ On a l'injection $\phi : G \underset{\text{Cayley}}{\hookrightarrow} S_n \underset{\text{matrices de permutation}}{\hookrightarrow} GL_n(\mathbb{F}_p)$ qui permet d'identifier G à un sous groupe de $GL_n(\mathbb{F}_p)$.

D'après ① et ②, G admet un p-Sylow. D'où (i)

④ Soient H et S deux p-Sylow de G
D'après le lemme clé, il existe $a \in G$ tel que $H \cap (aSa^{-1})$ est un p-Sylow de H.
H p-groupe donc $H \cap (aSa^{-1}) = H$. Par inclusion et égalité des cardinaux : $H = aSa^{-1}$

D'où (ii).

(5) G opère par conjugaison sur $X = \{ p\text{-Sylow de } G \}$ (d'après (ii), sens facile)

Soit S un p-Sylow de G, S agit sur X par restriction.

Formule des classes pour l'action de S

$$|X| = \sum_{x \in R} |\mathrm{Orb}(x)| = |X^S| + \underbrace{\sum_{\substack{x \in R \\ \mathrm{Stab}(x) \neq S}} \frac{|S|}{|\mathrm{Stab}(x)|}}_{\text{divisible par } p}$$

$$|X| \equiv |X^S| \pmod p$$

MQ $|X^S| = 1$:

- $S \in X^S$ ($\forall s \in S \quad sSs^{-1} = S$) donc $|X^S| \geq 1$
- Soit $T \in X^S$ et N le sous groupe de G engendré par S et T ($N = \langle S, T \rangle$)

  $\forall s \in S \cup T \quad sTs^{-1} = T$ donc T est distingué dans N

  Donc T est l'unique p-Sylow de N (d'après (ii), sens délicat)

  D'où $T = S$ et $|X^S| \leq 1$.

Finalement, $|X| \equiv 1 \pmod p$. D'où (iii)

(6) Soit S un p-Sylow de G

$n = |G| = |\mathrm{Stab}(S)|\,|\mathrm{Orb}(S)|$ pour l'action de G par conjugaison sur X

Or $|\mathrm{Orb}(S)| = n_p$ d'après (ii)

D'où $n_p \mid n$.

De plus (iii) $\Rightarrow p \wedge n_p = 1$ D'où $n_p \mid m$ ie (iv) $\square$