leçons:
159 : Formes linéaires et hyperplans
181 : Barycentres, convexité
190 : Combinatoire, dénombrement.

Théorème de Bárány

50

Références :
RMS
117e année MAI 2007 N°4

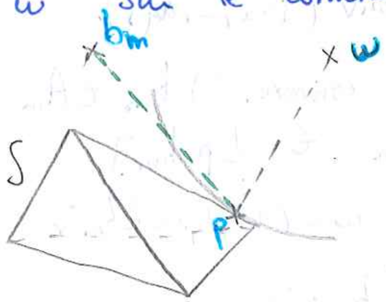
Thm : Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de dimension n et $\omega \in \mathcal{E}$.
Soit $m \geqslant n+1$ et $A_1, \dots, A_m$ des parties de $\mathcal{E}$.
On appelle convexe multicolore tout convexe de la forme $\mathrm{conv}(a_1, \dots, a_m)$ avec $(a_1, \dots, a_m) \in \prod_{i=1}^{m} A_i$.
Si $\omega \in \bigcap_{i=1}^{m} \mathrm{conv}\, A_i$, alors il existe un convexe multicolore S tq $\omega \in S$.

preuve :

① Par Carathéodory, on peut supposer que chaque A_i est de cardinal au plus $n+1$.
Il y a donc un nombre fini de convexes multicolores et il en existe un, noté S, tq $d := d(\omega, S) = \min\limits_{C \text{ convexe multicolore}} d(\omega, C)$. Il s'agit de montrer que $d = 0$.

Raisonnons par l'absurde et supposons que $d > 0$.

② On munit $\mathcal{E}$ d'une structure euclidienne et on note p le projeté de ω sur le convexe fermé S.



On a (i) $\|\overrightarrow{p\omega}\| = d > 0$
(ii) $\forall z \in S \quad \overrightarrow{pz} \cdot \overrightarrow{p\omega} \leqslant 0$

On note $H = \{x \in \mathcal{E} \mid \overrightarrow{px} \cdot \overrightarrow{p\omega} = 0\}$ l'hyperplan affine passant par p, de vecteur normal $\overrightarrow{p\omega}$. H est un hyperplan d'appui pour S.

On pose
- $H^- = \{x \in \mathcal{E} \mid \overrightarrow{px} \cdot \overrightarrow{p\omega} \leqslant 0\}$.
  H^- est un convexe fermé et $S \subset H^-$ par (ii)
- $H^+_* = \{x \in \mathcal{E} \mid \overrightarrow{px} \cdot \overrightarrow{p\omega} > 0\}$
  H^+_* est un convexe ouvert et $\omega \in H^+_*$ par (i)

③ <u>lemme</u> : $\mathrm{Extr}(S \cap H) = \mathrm{Extr}(S) \cap H$

preuve :

- Soit $x \in \mathrm{Extr}(S) \cap H$.

  $S \setminus \{x\}$ est convexe donc $(S \setminus \{x\}) \cap H = (S \cap H) \setminus \{x\}$ est convexe.

  Donc $x \in \mathrm{Extr}(S \cap H)$

- Soit $x \in \mathrm{Extr}(S \cap H)$

  Alors $x \in S \cap H$.

  Supposons que $x = \frac{a+b}{2}$ avec $a, b \in S$

  On prend φ une forme linéaire et $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\varphi_{|H} \equiv \lambda$.

  On a $\varphi(x) = \lambda = \frac{\varphi(a) + \varphi(b)}{2}$

  H hyperplan d'appui donc, par exemple, $\varphi(a) \leq \lambda$, $\varphi(b) \leq \lambda$.

  D'où $\lambda = \varphi(x) \cancel{\leq} \frac{\varphi(a)}{2} + \frac{\varphi(b)}{2} \leq \lambda$

  Donc $\varphi(a) = \varphi(b) = \lambda$. $(a, b) \in (H \cap S)^2$ et $x = \frac{a+b}{2} \in \mathrm{Extr}(H \cap S) \Rightarrow a = b = x$.

  Donc $x \in \mathrm{Extr}(S)$.

Par Krein-Milmann : $p \in \mathrm{conv}(\mathrm{Extr}(S \cap H))$ car $S \cap H$ convexe compact

Par le lemme $p \in \mathrm{conv}(\mathrm{Extr}(S) \cap H) \subset \mathrm{conv}(\{a_1, \dots, a_m\} \cap H)$

Par Carathéodory, H étant de dimension $n-1$, on a, quitte à renuméroter, $\exists q \leq n < m \mid p \in \mathrm{conv}\{a_1, \dots, a_q\}$

④ $\omega \in \mathrm{conv}(A_m) \cap H^+_*$ donc, comme H^- est convexe, $\exists b_m \in A_m \cap H^+_*$.

Pour $\varepsilon \in]0,1[$, on pose $x_\varepsilon = (1-\varepsilon)p + \varepsilon b_m \in [p, b_m]$

$$d(\omega, x_\varepsilon)^2 = \|\omega - x_\varepsilon\|^2 = \langle \omega - (1-\varepsilon)p - \varepsilon b_m, \omega - (1-\varepsilon)p - \varepsilon b_m \rangle$$

$$= \langle \omega - p + \varepsilon(p - b_m), \omega - p + \varepsilon(p - b_m) \rangle$$

$$= \|\omega - p\|^2 + 2\varepsilon \langle \omega - p, p - b_m \rangle + \varepsilon^2 \|p - b_m\|^2$$

$$d(\omega, x_\varepsilon)^2 - d^2 = \varepsilon \Big[-2 \underbrace{\overrightarrow{p\omega} \cdot \overrightarrow{pb_m}}_{>0} + \varepsilon \|p - b_m\|^2 \Big]$$

$d(\omega, x_\varepsilon)^2 - d^2 < 0$ pour $\varepsilon > 0$ petit. On choisit un tel ε.

Or $x_\varepsilon \in \mathrm{conv}(\{p, b_m\}) \subset \underbrace{\mathrm{conv}(\{a_1, \dots, a_{m-1}, b_m\})}_{= \tilde{S} \text{ convexe multicolore}}$

$d(\omega, \tilde{S}) \leq d(\omega, x_\varepsilon) < d$. Absurde.

Réécriture du ④ :

$\omega \in H_*^+ \cap \mathrm{conv}(A_m)$ et H^- est convexe donc il existe $b_m \in A_m \cap H_*^+$

Pour $\varepsilon \in]0,1[$, on pose $x_\varepsilon = (1-\varepsilon)p + \varepsilon b_m$. On a $\overrightarrow{px_\varepsilon} = \varepsilon \overrightarrow{pb_m}$

On pose $S' = \mathrm{conv}(a_1, \dots, a_q, \dots, a_{m-1}, b_m)$. S' est un convexe multicolore et $\forall \varepsilon \in]0,1[$ $x_\varepsilon \in S'$ par associativité du barycentre.

On pose $d_\varepsilon = d(\omega, x_\varepsilon) = \|\overrightarrow{\omega x_\varepsilon}\|$

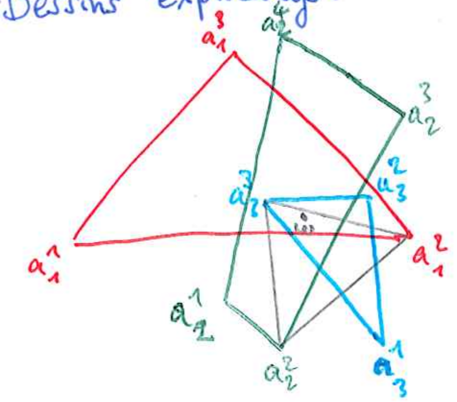
$$d_\varepsilon^2 = \|\overrightarrow{\omega p} + \overrightarrow{px_\varepsilon}\|^2 = \|\overrightarrow{p\omega}\|^2 + 2\,\overrightarrow{\omega p}\cdot\overrightarrow{px_\varepsilon} + \|\overrightarrow{px_\varepsilon}\|^2$$

$$d_\varepsilon^2 - d^2 = -2\varepsilon \underbrace{\overrightarrow{p\omega}\cdot\overrightarrow{pb_m}}_{>0} + \varepsilon^2 \|\overrightarrow{pb_m}\|^2 = \varepsilon\left[\varepsilon\|\overrightarrow{pb_m}\|^2 - 2\,\overrightarrow{pb_m}\cdot\overrightarrow{p\omega}\right]$$

$d_\varepsilon^2 - d^2 < 0$ pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit

Pour un tel ε : $d(\omega, S') \leqslant d(\omega, x_\varepsilon) < d$. Absurde.

Dessins explicatifs:



La borne est optimale :

Ici, les convexes multicolores sont des segments.

ω n'appartient à aucun de ces segments.