Leçon 201 : Espaces de fonctions. Exemples et applications.

I Espace $\mathcal{C}(K)$

Soient (X,d), (Y,d') des espaces métriques.

I.1 Continuité et convergence uniforme

[Rom] [Ber17]

Déf 1. On dit que $f : X \to Y$ est :

1. continue sur X, si : $\forall x \in X, \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta_{x,\varepsilon} > 0,\ \forall y \in X,\ d(x,y) \leq \delta_{x,\varepsilon} \Rightarrow d'(f(x),f(y)) \leq \varepsilon$.
2. uniformément continue sur X, si $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta_\varepsilon > 0,\ \forall x,y \in X,\ d(x,y) \leq \delta_\varepsilon \Rightarrow d'(f(x),f(y)) \leq \varepsilon$.

Rq 2. Une fonction uniformément continue, est continue. La réciproque est fausse, considérer $x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}$.

Thm 3 (Heine)**.** Si K est un compacte de (X,d), si $f : K \to Y$ est continue, alors elle est uniformément continue.

Prop 4. Si K est un compacte de (X,d) et $f : K \to Y$ est continue, alors $f(K)$ est un compacte de (Y,d').

Thm 5 (des bornes atteintes)**.** Si K est un compacte de (X,d) et $f : K \to Y$ est continue, alors f est bornée et atteint ses bornes.

Cor 6. Soit K un compacte de (X,d). L'espace $\mathcal{C}(K)$ des fonctions continues sur K à valeurs réels, et l'espace $\mathcal{C}(K,\mathbb{C})$, des fonctions continues à valeurs complexes, sont respectivement des sous-espaces de $\mathcal{C}_b(X,\mathbb{R})$ et $\mathcal{C}_b(X,\mathbb{C})$. De plus, $\|f\|_\infty := \sup_{x\in K} |f(x)|$ définit une norme sur $\mathcal{C}(K)$ pour $f \in \mathcal{C}(K)$. De même pour $\mathcal{C}(K,\mathbb{C})$.

Thm 7. $(\mathcal{C}(K), \|\cdot\|_\infty)$ est un espace de Banach.

Déf 8. Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions de X dans $\mathbb{C}$ et $f : X \to \mathbb{C}$. On dit que :

1. $(f_n)_n$ converge simplement sur X vers f si : $\forall x \in X,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists N_{x,\varepsilon} \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$.
2. $(f_n)_n$ converge uniformément sur X vers f si : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N},\ \forall x \in X,\ \forall n \geq N,\ |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$.

Rq 9. La convergence uniforme implique la convergence simple. La réciproque est fausse, considérer $x \mapsto x^n$ sur $[0,1]$. On remarque que l'hypothèse de continuité sur un compacte n'est plus suffisant pour avoir une réciproque partielle.

Déf 10. $(f_n)_n$ une suite de fonctions sur X est équicontinue si : $\forall x \in X,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta_{x,\varepsilon} > 0,\ \forall y \in X,\ d(x,y) \leq \delta_{x,\varepsilon} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ |f_n(x) - f_n(y)| \leq \varepsilon$

Thm 11 (Ascoli)**.** Soit K un espace compacte de X et soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions de K dans $\mathbb{C}$. Si $(f_n)_n$ est bornée pour $\|\cdot\|_\infty$ et est équicontinue, alors elle admet une sous-suite qui converge uniformément.

Lemme 12 (Dini)**.** Soit K un compacte de (X,d). Toute suite croissante de fonctions dans $\mathcal{C}(K)$, $(f_n)_n$, qui converge simplement vers une fonction f continue sur K, converge uniformément vers f sur K.

Ex 13. La suite de fonctions $(r_n)_n$ définie par récurrence sur $[0,1]$ par $r_0 = 0$ et $r_{n+1}(x) = r_n(t) + \frac{1}{2}(t - r_n(t)^2)$, converge uniformément sur $[0,1]$ vers $x \mapsto \sqrt{x}$.

I.2 Théorème de Stone-Weierstrass et conséquences

[Ber17] [Li] Soit K un compacte de (X,d).

Thm 14 (Bernstein)**.** Soit $f \in \mathcal{C}([0,1])$. La suite $(B_n(f))_n$ définie par $B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f(\frac{k}{n}) x^k (1-x)^k$, converge uniformément sur $[0,1]$ vers f.

Thm 15 (Stone-Weierstrass - DEV 1)**.** [Li] Soit $\mathcal{A}$ une sous-algèbre de $\mathcal{C}(K)$. Si :

1. $\mathcal{A}$ sépare les points : $\forall x,y \in K,\ \exists f \in \mathcal{A},\ f(x) \neq f(y)$.
2. $\mathcal{A}$ contient les constantes.

Alors $\mathcal{A}$ est dense dans $\mathcal{C}(K)$ pour $\|\cdot\|_\infty$.

C-ex 16. L'hypothèse "contenir les constantes" permet d'éliminer le cas de l'algèbre $\mathcal{A}_x := \{f \in \mathcal{C}(K) : f(x) = 0\}$ pour un certain $x \in K$.

App 17. Soit K un compacte de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$. Alors toute fonction $f \in \mathcal{C}(K)$ est limite uniforme suite d'une suite de polynôme à n variables $(P_k)_k$.

App 18. Soit A une partie dénombrable de (K, d). L'algèbre engendrée par $x \mapsto 1$ et les fonctions $x \mapsto d(a, x)$, $a \in A$, est dense dans $\mathcal{C}(K)$ pour $\|\cdot\|_\infty$. Il en résulte que $(\mathcal{C}(K), \|\cdot\|_\infty)$ est séparable.

Thm 19 (Stone-Weierstrass complexe)**.** Soit $\mathcal{A}$ une sous-algèbre de $\mathcal{C}(K, \mathbb{C})$. Si :

1. $\mathcal{A}$ est stable par conjugaison : $\forall f \in \mathcal{A}$, $\overline{f} \in \mathcal{A}$.
2. $\mathcal{A}$ sépare les points : $\forall x, y \in K$, $\exists f \in \mathcal{A}$, $f(x) \neq f(y)$.
3. $\mathcal{A}$ contient les constantes.

Alors $\mathcal{A}$ est dense dans $\mathcal{C}(K, \mathbb{C})$ pour $\|\cdot\|_\infty$.

App 20. Soit $(e_n)_n$ la suite de fonctions définie par $x \mapsto e^{inx}$. Alors l'ensemble des polynômes trigonométriques, $\mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}((e_n)_n)$, est dense dans $\mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ pour $\|\cdot\|_\infty$.

II Espaces L^p

[El 08]

II.1 Structure

Soit $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré.

Déf 21. Soit $p \in [1, +\infty]$.

1. Si $p < +\infty$, on note $\mathscr{L}^p(\mu) := \{f : X \to \mathbb{C} \text{ mesurable } : \int_X |f|^p d\mu\} < +\infty\}$.
2. Si $p = +\infty$, on note $\mathscr{L}^\infty(\mu) := \{f : X \to \mathbb{C} \text{ mesurable } : \exists M \in \mathbb{R}_+,\ |f| \leq M\ \mu - pp\}$

Prop 22. $\mathcal{L}^p$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

Prop 23 (Inégalité de Minkowski)**.** Soient $f, g \in \mathscr{L}^p$. Alors $\left(\int_{\mathbb{R}} |f+g|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_{\mathbb{R}} |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_{\mathbb{R}} |g|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$

Prop 24. $f \sim g \iff f = g\ \mu - pp$ définit une relation d'équivalence sur $\mathcal{L}^p(\mu)$.

Déf 25. Soit $p \in [1, +\infty]$. On note $L^p(\mu) := \mathcal{L}^p(\mu)/\sim$. On note abusivement par le même symbole "f", l'élément f de $\mathscr{L}^p(\mu)$ et $[f]$ sa classe dans $L^p(\mu)$.

Prop 26. Soit $p \in [1, +\infty]$.

1. Si $p < +\infty$. L'application $\|\cdot\|_p : L^p \to \mathbb{R}$, $f \mapsto \left(\int_{\mathbb{R}} |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$, définit une norme sur L^p.
2. Si $p = +\infty$, $\|\cdot\|_\infty : L^\infty \to \mathbb{R}$, $f \mapsto \inf\{M \in \mathbb{R}_+ : |f| \leq M\ \mu - pp\}$, définit une norme sur $(L^\infty, \|\cdot\|_\infty)$

Et $(L^p, \|\cdot\|_p)$ est un espace vectoriel normé.

Prop 27 (Inégalité de Holder)**.** Soient $p, q \in [1, +\infty]$ conjugués, c'est à dire que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (avec la convention $\frac{1}{\infty} = 0$), alors pour tout $(f, g) \in L^p \times L^q$, $fg \in L^1$ et $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$. Avec égalité, si et seulement si, il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+^2 \backslash \{0, 0\}$, $\alpha |f|^p = \beta |g|^q\ \mu - pp$

Cor 28. Soit $f \in L^p \cap L^q$, $1 \leq p \leq q \leq +\infty$, alors pour tout $p \leq r \leq q$, $f \in L^r$, et pour tout $\alpha \in [0, 1]$ tel que $\frac{1}{r} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{q}$, $\|f\|_r \leq \|f\|_p^\alpha \|f\|_q^{1-\alpha}$.

Thm 29 (Riesz-Fischer - DEV 2)**.** $(L^p, \|\cdot\|_p)$ est un espace de Banach. De plus, si $(f_n)_n$ converge dans L^p vers f, alors il existe une sous-suite $(f_{\varphi(n)})_n$ qui converge simplement $\mu - pp$ vers f.

II.2 Convolution

$X = \mathbb{R}$, $\mathcal{T} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et $\mu = dx$. [Li]

Déf 30. Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. On dit que le produit de convolution de f et g en $x \in \mathbb{R}$ existe si la fonction $t \mapsto f(x-t)g(t)$ est intégrable. On pose alors $(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-t)g(t)dt$.

Prop 31. $f * g$ existe, si et seulement si, $g * f$ existe. De plus, $f * g = g * f$.

Thm 32. Soient $p, q \in [1, +\infty]$ conjugués. Si $f \in L^p$ et $g \in L^q$, alors $f * g(x)$ existe pour tout $x \in \mathbb{R}$, et de plus, $f * g \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$.

Prop 33. Pour $1 \leq p < +\infty$, $\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ est dense danse L^p.

Cor 34. L^p est séparable pour $p < +\infty$.

Thm 35. Soient $f, g \in L^1$. Alors $f * g(x)$ existe pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, et $f * g \in L^1$. De plus, $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$.

Prop 36. L^1 est une algèbre de Banach commutative pour la convolution

Déf 37. On appelle densité de probabilité toute fonction $P \in L^1$ telle que $0 \leq P(x) \leq 1$ ppx et $\int_{\mathbb{R}} P(x)dx = 1$.

Thm 38. Soient P une densité de probabilité et $\varepsilon > 0$. On pose $P_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon} P(\frac{t}{\varepsilon})$, pour tout $t \in \mathbb{R}$. Alors :

1. Pour tout $g \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$, on a $\lim_{\varepsilon \to 0}(g * P_\varepsilon)(x) = g(x)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. Pour $1 \leq p < +\infty$, pour tout $f \in L^p$, alors $f * P_\varepsilon \in L^p$ et $\lim_{\varepsilon \to 0} \|f - f * P_\varepsilon\|_p = 0$

De plus, si $g \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$ est uniformément continue, alors la convergence de $g * P_\varepsilon$ vers g est uniforme.

Déf 39. On appelle approximation de l'unité, toute fonction $P_\varepsilon \in L^1$, indéxée par $\varepsilon > 0$, telles que $\int_{\mathbb{R}} P_\varepsilon(t)dt = 1$, et vérfiant les condition 1) et 2) du thm précédent.

Ex 40. [El 08] Noyau de Gauss : $\gamma_\varepsilon(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\varepsilon}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\varepsilon}\right)$

Thm 41. Si $f \in L^p$, $1 \leq p < +\infty$, et $\varphi \in \mathcal{C}_c^k(\mathbb{R})$, alors $f * \varphi \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R})$. De plus, $(f * \varphi)^{(h)} = f * \varphi^{(h)}$ pour $0 \leq h \leq k$.

Ex 42. Soit $\sigma(u) = e^{-\frac{1}{1-u^2}}$ si $|u| < 1$, $\sigma(u)$ si $|u| \geq 1$. Alors $\sigma \in \mathcal{C}^\infty$ et soit $A = \int_{\mathbb{R}} \sigma(u)du$. On pose $P(t) = e^{-\frac{1}{1-A^2t^2}}$ si $|t| < \frac{1}{A}$, et 0 sinon. Alors pour $f \in L^p$, $f * P_\varepsilon \in L^p \cap \mathcal{C}^\infty$ et $\|f - f * P_\varepsilon\|_p \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0$.

Thm 43. Pour $1 \leq p < +\infty$, $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ est dense dans L^p.

II.3 Transformations de Fourier dans L^1

$X = \mathbb{R}$, $\mathcal{T} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et $\mu = dx$. On considérera f une fonction de L^1

Déf 44. [El 08][p.109] On note $\widehat{f} : \xi \mapsto \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} f(x)dx$ la *transformée de Fourier* de f pour tout $\xi \in \mathbb{R}$

Lemme 45 (Riemann-Lebesgue)**.** [El 08] $\widehat{f}$ existe et on a $\lim_{\xi \to +\infty} \widehat{f}(\xi) = 0$.

Prop 46. $\widehat{f} \in \mathcal{C}_b$

Prop 47. $\mathcal{F} : (L^1, \|\cdot\|_{L^1}) \to (\mathcal{C}_0, \|\cdot\|_\infty)$, $f \mapsto \widehat{f}$ est linéaire continue

Ex 48. 1. (Densité de Poisson) : Soit $p : x \mapsto \frac{1}{2}e^{-|x|} \in L^1(\mathbb{R})$. Alors $\mathcal{F}(p)(\xi) = \frac{1}{1+x^2}$.

2. Soit $f = \mathbb{1}_{[a,b]}$, $b > a$. Alors $f \in L^1$, et $\mathcal{F}(f)(\xi) = 2\frac{\sin(\frac{b-a}{2}\xi)}{\xi} e^{-i(a+b)\xi/2}$ si $\xi \neq 0$, $b - a$ si $\xi = 0$.

Prop 49. [El 08][p.114] Pour tout $f, g \in L^1$, $\widehat{f * g} = \widehat{f} \cdot \widehat{g}$

App 50. Il n'y a pas d'éléments neutres dans L^1 pour le produit de convolution.

Thm 51 (formule de dualité)**.** [El 08][p.115] $f, g \in L^1$, $\int_{\mathbb{R}} f\widehat{g} = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}g$

Prop 52 (Transformée de Fourier de la Gaussienne)**.** Soit $a > 0$, alors $\mathcal{F}(x \mapsto e^{-ax^2})(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp\left(\frac{-\xi^2}{4a}\right)$

Thm 53 (Inversion de Fourier)**.** [El 08][p.116] Si $\widehat{f} \in L^1$, alors pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi) e^{ix\xi} dx$

Ex 54. $\mathcal{F}(x \mapsto \frac{1}{1+x^2})(\xi) = \pi e^{-|\xi|}$

Cor 55. $\mathcal{F}$ est injective.

Cor 56. [El 08] Soit $f, g \in L^1$. Si $\widehat{f}, \widehat{g} \in L^1$, alors $2\pi\widehat{fg} = \widehat{f} * \widehat{g}$

Prop 57. Soit $f \in L^1 \cap \mathcal{C}^1$, si $f' \in L^1$, alors pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, $\widehat{f'}(\xi) = i\xi\widehat{f}(\xi)$.

Prop 58. Soit $f \in L^1$ telle que $x \mapsto xf(x) \in L^1$. Alors $\widehat{f}$ admet une dérivée continue et bornée sur $\mathbb{R}$, et pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, $\widehat{f}'(\xi) = -i\mathcal{F}(x \mapsto xf(x))(\xi)$.

Bibliographie

[Ber17] François Berteloot. *Cinq leçons d'analyse fonctionnelle*. ellipses, 2017.

[El 08] Mohammed El Amarani. *Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels*. Ellipses, 2008.

[Li] Daniel Li. *Cours d'analyse fonctionelle*.

[Rom] Jean-Etienne Rombaldi. *Eléments d'analyse réelle*.