Leçon 191 : Exemples d'utilisation de techniques d'algèbre en géométrie.

I Réduction pour les transformations dans le plan et l'espace

[Gar18] E est un espace vectoriel euclidien orienté, muni du produit scalaire $<\cdot,\cdot>$.

Notation 1. On note $O(E)$ le groupe orthogonal. $SO(E)$ le groupe spécial orthogonal. $SO_-(E)$ l'ensemble des applications orthogonales de déterminant -1.

I.1 Groupe orthogonal en dimension 2

On suppose $\dim E = 2$, E orienté, rapporté à une base $\mathcal{B} := (\vec{i}, \vec{j})$ orthonormée directe.

Thm 2. soit $f \in SO(E)$, si dans une base orthonormée directe $\mathcal{B}$, $Mat_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, avec $a^2 + b^2 = 1$, alors la matrice de f dans une autre base orthonormée directe $\mathcal{B}'$ est également $Mat_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$.

Thm 3. tout élément de $SO_-(E)$ est une réflexion vectorielle. Tout élément de $SO(E)$ peut s'écrire comme composée de deux éléments de $SO_-(E)$.

Thm 4. Soit f une rotation vectorielle de $SO(E)$, alors il existe un unique couple $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $a^2+b^2 = 1$ et tels que dans toute base orthonormée directe, la matrice de f soit $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$. On peut alors considérer $\theta \in [0, 2\pi[$, vérifiant $a = \cos\theta$ et $b = \sin\theta$. On dit alors que f est la rotation vectorielle d'angle θ.

Ex 5. Soit dans E les vecteurs unitaires $\vec{i}$, $\vec{i'}$, $\vec{j}$ et $\vec{j'}$, où $(\vec{i}, \vec{j})$ est une base orthonormée directe. Soit f la rotation d'angle θ. Alors si $f(\vec{i}) = \vec{i'}$, et $f(\vec{j}) = \vec{j'}$. L'angle entre $\vec{i}$ et $\vec{i'}$ est θ. De même pour $\vec{j}$ et $\vec{j'}$.

Prop 6. Soit f la rotation vectorielle d'angle θ, et g la rotation vectorielle d'angle φ. Alors $f \circ g = g \circ f$ est la rotation vectorielle d'angle $\theta + \varphi$.

Prop 7. Soit $s \in SO_-(E)$ une réflexion vectorielle, de base $\mathrm{Vect}(\vec{u})$. Si θ est l'angle (modulo 2π) entre $\vec{i}$ et $s(\vec{i})$, alors l'angle entre $\vec{i}$ et $\vec{u}$ est $\frac{\theta}{2}$ (mod 2π).

Ex 8. En reprenant les notations de l'exemple précédent et de la dernière proposition, on a que $s(\vec{i}) = \vec{i'}$ et $s(\vec{j}) = -\vec{j'}$.

I.2 Groupe orthogonal en dimension 3

On suppose E euclidien orienté de dimension 3.

Thm 9 (Classification des applications orthogonales en dimension 3)**.** Soient $f \in O(E)$ et $F = \mathrm{Ker}(f - Id_E)$. F est stable par f, $\dim F \in \{0,1,2,3\}$ et :

1. Si $\dim F = 3$, $f = \mathrm{Id}_E$.
2. Si $\dim F = 2$, alors $f|_{F^\perp} = -\mathrm{Id}_E$ et donc f est la réflexion vectorielle de base F.
3. Si $\dim F = 1$, $f|_{F^\perp}$ est une rotation vectorielle plane dans le plan $F^\perp$. Si l'on oriente $F^\perp$, on considère $(\vec{i}, \vec{j})$ une base orthonormée directe de $F^\perp$, et $\vec{k}$ un vecteur unitaire de F. Alors il existe un unique $\theta \in [0, 2\pi[$ tel que $Mat_{(\vec{i},\vec{j},\vec{k})}(f) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On dit que f est une rotation d'axe dirigée par $\vec{k}$, d'angle θ.
4. Si $\dim F = 0$, alors la matrice de f dans une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Il vient que soit $f = -\mathrm{Id}_E$, soit f est la composée commutative d'une rotation d'axe F et d'une réflexion vectorielle plane de base $F^\perp$.

Thm 10. Si $\dim E \in \{2,3\}$, soit $f \in O(E)$. Alors il existe $p \in \{0,1,\dots,n\}$ tel que :

1. f est la composée de p symétries vectorielles orthogonales hyperplanes de E.
2. La dimension du sous-espace vectoriel des vecteurs invariants est $n - p$.

Cor 11. L'ensemble des réflexions de E forme un système générateur de $O(E)$.

Rq 12. Ce résultat est vrai en toute dimension.

Déf 13. Tout symétrie vectorielle orthogonale de E par rapport à une droite vectorielle s'appelle un retournement vectoriel de E.

Thm 14. $SO(E)$ est engendré par les retournements vectoriels.

Rq 15. Ce résultat est vrai en tout dimensions $n \geq 3$. On dira qu'un retournement est une symétrie orthogonale par rapport à un sous-espace de dimension $n-2$.

I.3 Etude de $SO_3(\mathbb{R})$ et $SO_4(\mathbb{R})$ par les quaternions

[CG17]

Déf 16. On appelle corps des quaternions, et l'on note $\mathbb{H}$ l'algèbre de dimension 4 sur le corps des réels, ayant pour base $(\mathbf{1}, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$, dans laquelle la multiplication est définie par :

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -1 \text{ et } \mathbf{ijk} = -1.$$

Notation 17. On note $SU_2(\mathbb{C}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & -\overline{b} \\ b & \overline{a} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C}) : |a|^2 + |b|^2 = 1 \right\}$.

Prop 18. $SU_2(\mathbb{C})$ est un sous-groupe de $GL_2(\mathbb{C})$, en homéomorphe avec $\mathbb{S}^3$.

Notation 19. On note $H^* \simeq \mathbb{R}_+^* I_2 \times SU_2(\mathbb{C}) \subseteq GL_2(\mathbb{C})$.

Thm 20. $\mathbb{H} \simeq H^* \cup \{0\}$. On notera alors $\mathbb{H} = \left\{ \begin{pmatrix} a & -\overline{b} \\ b & \overline{a} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C}) : a, b \in \mathbb{C} \right\}$.

Notation 21.

1. Si $x, y, z, t \in \mathbb{R}$, et si l'on note $a = x + iy$, $b = z + it$, un élément de $\mathbb{H}$ s'écrit $h = x\mathbf{1} + y\mathbf{i} + z\mathbf{j} + t\mathbf{k} = \begin{pmatrix} a & -\overline{b} \\ b & \overline{a} \end{pmatrix}$.
2. On note $\overline{h} = x\mathbf{1} - y\mathbf{i} - z\mathbf{j} - t\mathbf{k}$ le conjugué de h.
3. On note $N(h) = \det h = |a|^2 + |b|^2 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2$.
4. On note $\mathbb{I} = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$.

Thm 22. $\mathbb{H}$ est une sous-algèbre de $M_2(\mathbb{C})$. De plus, c'est un corps non commutatif. Son centre est $\mathbb{R}$.

Thm 23 (DEV 1)**.** Il existe deux isomorphismes de groupes :

1. $SU_2(\mathbb{C})/\{\pm I_2\} \simeq SO_3(\mathbb{R})$.
2. $SU_2(\mathbb{C}) \times SU_2(\mathbb{C})/\{(I_2, I_2), (-I_2, -I_2)\} \simeq SO_4(\mathbb{R})$.

App 24.

1. $SO_3(\mathbb{R})$ est homéomorphe avec $\mathbb{P}^3(\mathbb{R}) := \mathbb{S}^3/\{I_3\}$.
2. $PSO_4(\mathbb{R}) \simeq SO_3(\mathbb{R}) \times SO_3(\mathbb{R})$.

II Les groupes et espaces vectoriels pour la géométrie affine

[CG17]

II.1 Construction des espaces affines

On considère un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension finie n, noté $\overrightarrow{E}$, et un ensemble E non vide.

Déf 25. E est un espace affine associé à $\overrightarrow{E}$ si $(\overrightarrow{E}, +)$ agit de façon simplement transitive sur E. Si $\overrightarrow{E}$ est de dimension n, on dit que E est de dimension n. On appelle vecteur tout élément de $\overrightarrow{E}$ et point tout élément de E.

Notation 26. $\forall \overrightarrow{u} \in \overrightarrow{E}$, $\forall M \in E$, $\overrightarrow{u} \cdot M =: M + \overrightarrow{u}$. On note $\overrightarrow{AB}$ le vecteur $\overrightarrow{u}$ tel que $A = B + \overrightarrow{u}$.

Ex 27. L'espace vectoriel $\overrightarrow{E}$ est aussi un espace affine associé à $\overrightarrow{E}$.

Prop 28 (Relation de Chasles)**.** $\forall A, B, C \in E$, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

Déf 29. Soit E un espace affine associé à E. Soient $\mathscr{B}$ une base de $\overrightarrow{E}$, et O un point de E. On appelle repère de E l'ensemble $(O, \mathscr{B})$ et O s'appelle l'origine du repère.

Prop 30. Si $\mathscr{B} = (\overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_n})$. Pour tout $M \in E$, il existe un unique n-uplet $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que $\overrightarrow{OM} = \sum_{i=1}^{n} x_i \overrightarrow{e_i}$.

II.2 Applications affines. Groupe affine

E est un espace affine associé à $\overrightarrow{E}$ de dimension finie n.

Déf 31. On dit qu'une application $f : E \to E$ est une application affine s'il existe un point A de E, et un endomorphisme l de $\overrightarrow{E}$ vérifiant :

$$\forall M \in E,\ \overrightarrow{f(A)f(M)} = l(\overrightarrow{AM})$$

Prop 32. $\exists! l \in \mathscr{L}(\overrightarrow{E})$, $\forall M, P \in E$, $\overrightarrow{f(P)f(M)} = l(\overrightarrow{PM})$. On appelle l l'application linéaire associée à f. On la note $\overrightarrow{f}$.

Thm 33. Soit $(O, M_1, \dots, M_n)$ un repère affine de E. Soient $O', M_1', \dots, M_n' \in E$. Alors il existe une application affine f telle que $f(O) = O'$ et $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, $f(M_i) = M_i'$.

Prop 34. f est injective (resp. surjective) si et seulement si $\overrightarrow{f}$ est injective (resp. surjective).

Thm 35. Toute application affine f conserve le barycentre, ie, si $G = \text{bar}\begin{pmatrix} A_1 & \cdots & A_n \\ \alpha_1 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix}$, alors $f(G) = \text{bar}\begin{pmatrix} f(A_1) & \cdots & f(A_n) \\ \alpha_1 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix}$.

Notation 36. On note $GA(E)$ l'ensemble des applications affines bijectives de E dans E.

Thm 37. $(GA(E), \circ)$ est un groupe. On l'appelle groupe affine de E.

Déf 38. Soit $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{E}$. On appelle translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ l'application $t_{\vec{u}} : E \to E$, qui à M associe l'unique point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{u}$.

Prop 39. L'ensemble des translations de E est un sous-groupe commutatif de $(GA(E), \circ)$, noté $T(E)$.

Thm 40. L'application $L : \begin{cases} GA(E) & \longrightarrow & GL(\overrightarrow{E}) \\ f & \longmapsto & \overrightarrow{f} \end{cases}$ est un morphisme de groupe surjectif, de noyau $T(E)$.

Cor 41. $T(E)$ est distingué dans $GA(E)$, et $GA(E)/T(E) \simeq GL(\overrightarrow{E})$.

Déf 42. On appelle projection affine de E toute application affine $p : E \to E$ vérifiant $p \circ p = p$.

Prop 43. Si p est une projection affine, alors $\overrightarrow{p}$ est un projecteur.

Prop 44. Soit f une application affine de E. Alors, f est une projection affine de E, si et seulement si, il existe deux sous-espaces vectoriels supplémentaires $\overrightarrow{E_1}$ et $\overrightarrow{E_2}$ de $\overrightarrow{E}$, et un sous-espace affine E_1 de direction $\overrightarrow{E_1}$, tels que :

$$\forall M \in E,\ \{f(M)\} = E_1 \cap \{M' \in E : \overrightarrow{MM'} \in \overrightarrow{E}\}$$

On dit dans ce cas que f est la projection sur E_1, parallèlement à $\overrightarrow{E_2}$.

Déf 45. Soit D une droite de E, A un point de D et $\overrightarrow{i}$ un vecteur directeur de D. Soit $M \in D$. On appelle mesure algébrique de $\overrightarrow{AM}$, l'unique réel λ vérifiant $\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{i}$. On note $\lambda = \overline{AM}$.

Cor 46 (Théorème de Thalès)**.** Soit dans l'espace affine E de dimension n, trois hyperplans parallèles et distincts deux à deux, H, K et L. Soit D une droite coupant les trois hyperplans H, K et L en A, B et C respectivement. Soit une autre droite D' coupant H, K et L en A', B' et C' respectivement. Alors :

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{A'C'}}{\overline{A'B'}}$$

III Théorie des corps pour la construction à la règle et au compas

[Car89]

III.1 Définitions et premières constructions

Déf 47. Soit $\mathcal{P}$ un plan euclidien. Un point M de $\mathcal{P}$ est dit constructible s'il est point d'intersection de deux droites, d'une droite et d'un cercle, ou de deux cercles, constructibles à la règle et au compas.

Prop 48. Un repère (O, I, J) est constructible.

Déf 49. Un nombre réel est dit constructible si c'est une coordonnée dans le repère (O, I, J) d'un point constructible.

Thm 50. L'ensemble $\mathscr{C}$ des nombres constructibles est le plus petit sous-corps de $\mathbb{R}$, stable par racine carrée.

Déf 51. Un nombre complexe z est dit constructible si son affixe est coordonnée d'un point constructible dans un repère (O, I, J).

Thm 52. L'ensemble $\mathscr{C}(i)$ des complexes constructibles à la règle et au compas est un sous-corps de $\mathbb{C}$, stable par racine carrée.

Prop 53. Un nombre complexe $z = x + iy$ est constructible, si et seulement si, x et y sont des nombres réels constructibles.

Rq 54. On identifiera alors le plan complexe à un plan euclidien.

III.2 Théorème de Wantzel et conséquences

Toute définition donnée pour un nombre complexe pourra être rapporté à un nombre réel.

Thm 55 (Wantzel)**.** Soit $t \in \mathbb{R}$, t est un nombre constructible, si et seulement si, il existe un entier $p \geq 1$ et une suite de sous-corps de $\mathbb{R}$: $\mathbb{K}_1, \dots, \mathbb{K}_p$, tels que $\mathbb{K}_1 = \mathbb{Q}$, pour tout $1 \leq i \leq p-1$, $\mathbb{K}_i \subseteq \mathbb{K}_{i+1}$ et $[\mathbb{K}_{i+1} : \mathbb{K}_i] = 2$ et $t \in \mathbb{K}_p$.

Cor 56. Tout nombre constructible est algébrique sur $\mathbb{Q}$, et son degré est une puissance de 2.

Ex 57.
- π n'étant pas algébrique sur $\mathbb{Q}$, π n'est pas constructible.
- $X^3 - 2$ étant irréductible sur $\mathbb{Q}$, ses racines : $\sqrt[3]{2}$, $j\sqrt[3]{2}$ et $j^2\sqrt[3]{2}$ ne sont pas constructibles.
- La réciproque est fausse : une racine réelle de $X^4 - X - 1$ n'est pas constructible.

App 58 (Réponse aux trois problèmes de l'Antiquité)**.** La quadrature du cercle, la duplication du cube et la trisection de l'angle, sont fausses.

III.3 Construction des polygones réguliers

Déf 59. Soit $n \geq 3$. On dit que le polygone régulier à n côtés, appelé n-gone, est constructible si l'angle $\widehat{\frac{2\pi}{n}}$ est constructible.

Ex 60. Puisqu'on sait construire des bissectrices, pour tout $\alpha \geq 2$, le 2^α-gone est constructible.

Rq 61. Pour montrer qu'un n-gone est constructible, il suffit de montrer qu'une racine primitive n–ième de l'unité est constructible.

Ex 62. $\zeta = e^{\frac{2i\pi}{5}}$ est constructible à la règle et au compas. Il vient que le pentagone régulier est constructible à la règle et au compas.

Thm 63 (DEV 2)**.** Si p est un nombre premier de Fermat, alors $\zeta := e^{\frac{2i\pi}{p}}$ est constructible à la règle et au compas.

Cor 64 (Gauss-Wantzel)**.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$, le polygone régulier à n côtés est constructible si et seulement si soit $n = 2^m$ où $m \geq 2$, soit $n = 2^m p_1 \dots p_r$ où $m \in \mathbb{N}$, $r \geq 1$ et les p_i sont des nombres premiers de Fermat distincts.

Ex 65.
- Le polygone régulier à 17 côtés est constructible à la règle et au compas.
- Le polygone régulier à 19 côtés n'est pas constructible à la règle et au compas.

Bibliographie

[CG17] Philippe Caldero et Jérôme Germoni. *Nouvelles histoires hédonistes de groupes et de géométries, tome second*. Calvage & Mounet, 2017.

[Car89] Jean-Claude Carrega. *Théorie des corps. La règle et le compas.* Nouvelle édition. Editeurs des sciences et des arts, 1989.

[Gar18] Jean-Marc Garnier. *Groupes et géométrie pour l'agrégation*. ellipses, 2018.