Leçon 158 : Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel euclidien (de dimension finie).

Soit E un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, muni du produit scalaire $<\cdot,\cdot>$. On note $\|\cdot\|$ sa norme associée.

I Isométries. Groupe orthogonal

I.1 Définitions et premières propriétés

[Rom21]

Déf 1. On dit que $u : E \to E$ est une isométrie si pour tout $x, y \in E$, $< u(x), u(y) >=< x, y >$. On note $O(E)$ l'ensemble des isométries de E.

Ex 2. Une homothétie $x \mapsto \lambda x$ est une isométrie si $\lambda = \pm 1$.

Rq 3. Une isométrie conserve les mesures d'angle, en effet, pour tout $x, y \in E$, $\widehat{(x,y)} = \arccos\left(\frac{< x,y >}{\|x\|\|y\|}\right) = \arccos\left(\frac{< u(x),u(y) >}{\|u(x)\|\|u(y)\|}\right) = (\widehat{u(x),u(y)})$.

Prop 4. Soit $u : E \to E$. u est une isométrie, si et seulement si, u est linéaire, et pour tout $x \in E$, $\|u(x)\| = \|x\|$

Cor 5. Si $u \in O(E)$, alors $\mathrm{Spec}(u) \subseteq \{\pm 1\}$

Ex 6. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, tout endomorphisme d'un plan vectoriel qui a pour matrice dans une base orthonormée $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$ a pour valeur propre 1 et -1

Prop 7. $(O(E), \circ)$ est un sous-groupe de $(GL(E), \circ)$. On l'appelle groupe orthogonal.

Thm 8. Soient $u \in O(E)$ et F un sous-espace vectoriel de E. F est stable par u, si et seulement si, $F^\perp$ est stable par u.

Prop 9. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. u est une isométrie, si et seulement si, u transforme une base orthonormée $(e_1, \ldots, e_n)$ de E en une autre base orthonormée $(u(e_1), \ldots, u(e_n))$ de E.

Prop 10. Soient $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E, $u \in L(E)$ et A sa matrice dans la base $\mathcal{B}$. u est une isométrie, si et seulement si, ${}^tAA = A^tA = I_n$.

Déf 11. On dit que $A \in M_n(\mathbb{R})$ est orthogonale si ${}^tAA = A^tA = I_n$. On note $O_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales.

Ex 12. La matrice de passage d'une base orthonormée de E, vers une autre base orthonormée de E, une matrice orthogonale.

Prop 13. Pour tout $A \in O_n(\mathbb{R})$, $\det A = \pm 1$. Entre autre, $O_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $(GL_n(\mathbb{R}), \cdot)$.

Cor 14. Pour tout $u \in O(E)$, $\det u = \pm 1$.

Notation 15. On note $SO(E) = \{u \in O(E) : \det u = 1\}$ et $O^-(E) = \{u \in O(E) : \det u = -1\}$

Prop 16. $SO(E)$ (resp. $SO_n(\mathbb{R})$) est sous-groupe distingué de $O(E)$ (resp. $O_n(\mathbb{R})$), d'indice 2. On les appelle groupe spécial orthogonal.

Déf 17. Soit F un sous-espace vectoriel de E. La symétrie orthogonale par rapport à F est l'application définie sur E par : $\forall x \in E$, $s_F(x) = p_F(x) - p_{F^\perp}(x)$. Où p_F désigne le projeté orthogonal sur F.

I.2 Réduction des isométries. Parties génératrices.

Prop 18. Si $\dim E = 2$, pour tout $u \in O(E)$, la matrice de u dans une base orthonormée de E est soit de la forme $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, soit de la forme $S_\theta := \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$, avec $\theta \in \mathbb{R}$. En particulier, si u n'admet pas de valeurs propres réelles, alors la matrice de u est de la forme R_θ.

Thm 19. Soit $u \in O(E)$. Alors il existe une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de u est diagonale par blocs, avec des blocs parmi I_p, $-I_q$, $R_{\theta_1}, \ldots, R_{\theta_k}$, avec $\theta_i \in \mathbb{R}\backslash\pi\mathbb{Z}$.

Déf 20. On appelle réflexion une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan. On appelle retournement une symétrie orthogonale par rapport à un sous-espace de dimension $n-2$.

Prop 21. Soit F un sous-espace vectoriel de E. $s_F^2 = s_F$ et s_F est auto-adjoint. $s_F \in O(E)$. Enfin, si F est de dimension $1 \le p \le n-1$, il existe une base dans laquelle la matrice de s_F est $\begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_{n-p} \end{pmatrix}$. D'où $\det s_F = (-1)^{n-p}$.

Thm 22. Si $\dim E \geq 2$, $O(E)$ est engendré par les réflexions. Précisément, toute isométrie de E peut s'écrire comme le produit d'au plus n réflexions.

Thm 23. $SO(E)$ est engendré par les retournements.

App 24. $SO_3(\mathbb{R})$ est simple.

Thm 25 (Classification en dimension 3)**.** Supposons $\dim E = 3$. Soit $u \in O(E)$. On note $m_g(1) = \dim E_1(u)$ et $m_g(-1) = \dim E_{-1}$.

1. Si $m_g(1) = 3$ ou $m_g(-1) = 3$, alors $u = \mathrm{Id}$ ou $u = -\mathrm{Id}$.
2. Si $m_g(1) = 2$, alors u est une réflexion par rapport au plan $E_1(u)$.
3. Si $m_g(1) = 1$, alors u est une symétrie orthogonale par rapport à la droite $E_1(u)$.
4. Si $m_g(1) = 1$ et $m_g(-1) = 0$, alors u est une rotation de paramètre $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$.
5. Si $m_g(1) = 0$ et $m_g(-1) = 1$, alors u est la composée d'une réflexion et d'une rotation de paramètre $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$.

I.3 Lien avec les quaternions

Notation 26. On note $\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} a & -\overline{b} \\ b & \overline{a} \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{C} \right\}$, $\mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ et $K = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Prop 27. $\mathbb{L}\backslash\{0\} \subseteq \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$, et $I^2 = J^2 = K^2 = -\mathbb{1}$ et $IJK = -\mathbb{1}$. De plus, $\mathbb{L}$ est un corps non commutatif et une $\mathbb{R}$-algèbre de dimension 4. Enfin, le centre de $\mathbb{L}$ est $\mathbb{1}\mathbb{R}$.

Thm 28. Il existe une unique $\mathbb{R}$-algèbre $\mathbb{H}$ vérifiant les conditions suivantes :

1. $\mathbb{H}$ est un corps.
2. $\mathbb{H}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 4, possédant une base $(1, i, j, k)$ telle que 1 soit l'élément neutre pour la multiplication, et $i^2 = j^2 = k^2 = -1$ et $ijk = -1$.

On dit que $\mathbb{H}$ est le corps des quaternions. En identifiant $\mathbb{R}$ à $1\mathbb{R}$, le centre de $\mathbb{H}$ est $\mathbb{R}$, et tout élément q de $\mathbb{H}$ s'écrit de manière unique sous la forme $q = x + iy + zj + tk$, $x, y, z, t \in \mathbb{R}$.

Notation 29.
1. On note $\overline{q} = x\mathbf{1} - y\mathbf{i} - z\mathbf{j} - t\mathbf{k}$ le conjugué de q.
2. On note $N(h) = \det h = |a|^2 + |b|^2 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2$.
3. On note $\mathbb{I} = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$.

Prop 30. N définit une norme sur $\mathbb{H}$, et $N(hh') = N(h)N(h')$ pour tout $h, h' \in \mathbb{H}$.

Notation 31. On note $SU_2(\mathbb{C}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & -\overline{b} \\ b & \overline{a} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C}) : |a|^2 + |b|^2 = 1 \right\} \simeq \{q \in \mathbb{H} : N(h) = 1\}$.

Prop 32. $SU_2(\mathbb{C})$ est un sous-groupe de $GL_2(\mathbb{C})$, homéomorphe avec $\mathbb{S}^3$.

Thm 33 (DEV 1)**.** Il existe deux isomorphismes de groupes :

1. $SU_2(\mathbb{C})/\{\pm I_2\} \simeq SO_3(\mathbb{R})$.
2. $SU_2(\mathbb{C}) \times SU_2(\mathbb{C})/\{(I_2, I_2), (-I_2, -I_2)\} \simeq SO_4(\mathbb{R})$.

II Endomorphismes auto-adjoints. Matrices symétriques

II.1 Adjoint et endormorphismes auto-adjoints

[Rom21]

Lemme 34 (Théorème de représentation de Riesz)**.** Pour toute forme linéaire $l : E \to \mathbb{R}$, il existe un unique $y \in E$ tel que pour tout $x \in E$, $l(x) = < x, y >$.

Thm 35. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$, il existe un unique endomorphisme $u^* \in \mathscr{L}(E)$ tel que pour tout $x, y \in E$, $< u(x), y > = < x, u^*(y) >$. On l'appelle adjoint de u.

Ex 36. Soit $u \in O(E)$, alors $u^* = u^{-1}$.

Prop 37. Soient $u, v \in \mathscr{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :

1. $(u + \lambda v)^* = u^* + \lambda v^*$, $(u^*)^* = u$, $(u \circ v)^* = v^* \circ u^*$, et si $u \in GL(E)$, $u^* \in GL(E)$ et $(u^{-1})^* = (u^*)^{-1}$.
2. $\mathrm{Ker}(u^*) = \mathrm{Im}(u)^\perp$ et $\mathrm{Im}(u^*) = \mathrm{Ker}(u)^\perp$. Entre autre, $\mathrm{rg}(u) = \mathrm{rg}(u^*)$.
3. La matrice de u^* dans une base orthonormée de E est la transposée de la matrice de u dans cette base.
4. Si F est un sous-espace de E stable par u, alors $F^\perp$ est stable par u^*.

Déf 38. Un endomorphisme $u \in \mathscr{L}(E)$ est dit auto-adjoint si $u^* = u$. On note $S(E)$ l'ensemble des endomorphismes auto-adjoints.

Ex 39. Un projecteur orthogonal de E est auto-adjoint.

Notation 40. On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : A = {}^tA\}$ l'ensemble des matrices symétriques réelles.

Thm 41. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. u est auto-adjoint, si et seulement si, sa matrice dans une base orthonormée de E est symétrique.

Cor 42. $\dim S(E) = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Déf 43. Une matrice $S \in M_n(\mathbb{R})$ est dite symétrique positive (resp. définie positive) si S est symétrique et pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, ${}^txSx \geq 0$ (resp. pour tout $x \in \mathbb{R}^n\backslash\{0\}$, ${}^tSx > 0$. On note $S_n^+(\mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$) l'ensemble des matrices symétriques réelles positives (resp. définies positives.)

Thm 44. Soit $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
2. $\mathrm{Spec}(S) \subseteq \mathbb{R}_+^*$
3. Les mineur principaux de S sont tous strictement positifs.

II.2 Réduction des endomorphismes auto-adjoints

Prop 45. Soit $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, alors $\mathrm{Spec}(S) \subseteq \mathbb{R}$.

Prop 46. Les sous-espaces propres d'un endomorphisme auto-adjoint sont deux à deux orthogonaux.

Thm 47 (Théorème spectral)**.** Pour tout $u \in S(E)$, il existe une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de u est diagonale.

Thm 48 (Théorème spectral - version matricielle)**.** Pour tout $S \in S_n(\mathbb{R})$, il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ et D diagonale avec les valeurs propres de S, telle que $S = {}^tPDP$.

Rq 49. Le caractère réel de l'espace est important : $\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}$ est symétrique mais pas diagonalisable.

App 50. Soit $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, de valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Alors $\sum_{1\leq i,j\leq n} a_{ij}^2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2$.

Thm 51 (Co-diagonalisation)**.** Soient $u, v \in \mathcal{S}(E)$ telles que $u \circ v = v \circ u$. Il existe une base orthonormée de E dans laquelle les matrices de u et v sont diagonales.

III Topologie

[Rom21] On munit $M_n(\mathbb{R})$ et $\mathscr{L}(E)$ d'une norme quelconque.

Prop 52. $O(E)$ est compacte dans $\mathscr{L}(E)$.

Prop 53. Les composantes connexes de $O(E)$ sont $SO(E)$ et $O^-(E)$.

Prop 54. $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ est un ouvert de $M_n(\mathbb{R})$.

Prop 55. $\mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R})$ est un fermé convexe de $M_n(\mathbb{R})$, d'intérieur $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

IV Décomposition polaire

Lemme 56. Pour tout $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, $|||S|||_2 = \rho(S)$, où $\rho(S)$ désigne le rayon spectral de S.

Thm 57 (DEV 2)**.** $\exp : \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ est un homéomorphisme.

Cor 58. Pour tout $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, il existe une unique matrice $T \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $T^2 = S$

Thm 59 (Décomposition polaire)**.** L'application $O_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \to GL_n(\mathbb{R})$, $(O, S) \mapsto OS$ est un homéomorphisme.

Cor 60. Pour tout $A \in M_n(\mathbb{R})$, il existe $(O, S) \in \text{‰}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telles que $A = OS$.

App 61. Pour tout $M \in M_n(\mathbb{R})$, $|||M|||_2^2 = \rho({}^tMM)$.

App 62. Soit G un sous-groupe compacte de $GL_n(\mathbb{R})$ contenant $O_n(\mathbb{R})$. Alors $G = O_n(\mathbb{R})$.

App 63. Tout hyperplan de $M_n(\mathbb{R})$ contient une matrice orthogonale.

Bibliographie

[Rom21] Jean-Étienne Rombaldi. *Mathématiques pour l'agrégation : Algèbre et géométrie*. 2e éd. De Boeck Supérieur, 2021.