Leçon 156 : Endomorphismes trigonalisables. Endomorphismes nilpotents.

$\mathbb{K}$ est un corps. E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. Ma réf est principalement [MM22], complétée avec [Gou08] et [CP22].

I Endomorphismes trigonalisables

I.1 Critères de trigonalisation

Déf 1.
- Un endomorphisme est trigonalisable s'il existe une base dans laquelle sa matrice est triangulaire supérieure.
- Une matrice est trigonalisable si elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure.

Prop 2. Un endomorphisme est trigonalisable, si et seulement si, sa matrice dans une base de E est trigonalisable.

Lemme 3 (Lemme des noyaux)**.** Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ et $P \in \mathbb{K}[X]$, scindé, dont la décomposition en facteurs irréductibles est $P = P_1^{\alpha_1} \dots P_r^{\alpha_r}$. Alors :

$$\operatorname{Ker}(P(u)) = \bigoplus_{i=1}^{r} \operatorname{Ker}(P_i(u))^{\alpha_i}$$

Thm 4 (Cayley-Hamilton)**.** Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. Alors son polynôme caractéristique χ_u est un polynôme annulateur de u.

Thm 5. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. u est trigonalisable, si et seulement si, il admet un polynôme annulateur scindé.

Cor 6. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. Alors u est trigonalisable, si et seulement si, son polynôme minimal μ_u est scindé.

Ex 7. La matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ est trigonalisable dans $M_n(\mathbb{R})$.

Cor 8. Tout endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel est trigonalisable.

App 9. Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. Alors $\det e^A = e^{\operatorname{Tr} A}$

Prop 10. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ trigonalisable, et soit F un sous-espace de E stable par u. Alors $u|_F$ est trigonalisable.

Prop 11. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ trigonalisable. Alors, la trace et le déterminant de u sont respectivement la somme et le produit de ses valeurs propres comptées avec leurs multiplicités.

I.2 Co-trigonalisation

Déf 12. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Une famille d'endomorphismes $(u_1, \dots, u_p)$ de E est co-trigonalisable s'il existe une base de E dans laquelle chacun des u_k admet une matrice diagonale.

Prop 13. Soient $u, v \in \mathscr{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Si $u \circ v = v \circ u$, alors $\operatorname{Ker}(u - \lambda \operatorname{Id}_E)$ est stable par v.

Thm 14. Soient $u_1, \dots, u_p$ des endomorphismes diagonalisables de E. Alors la famille $(u_1, \dots, u_p)$ est co-trigonalisable, si et seulement si, les endomorphismes u_i et u_j commutent pour tout $i, j \in \{1, \dots, p\}$.

II Endomorphismes nilpotents

II.1 Premiers résultats

Déf 15. Un endomorphisme $u \in \mathscr{L}(E)$ est nilpotent s'il existe $r \in \mathbb{N}$ tel que $u^r = 0_{\mathscr{L}(E)}$. On appelle indice de nilpotence le plus petit entier r tel que $u^r = 0$.

Ex 16. L'endomorphisme $D : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$, $P \mapsto P'$ est nilpotent.

Ex 17. La matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est nilpotente.

Prop 18. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. Sont équivalents :

i) u est nilpotent

ii) 0 est l'unique valeur propre de u

iii) u est annulé par un monôme non nul.

Prop 19. Tout endomorphisme nilpotent admet dans une base adaptée une matrice triangulaire strictement supérieure.

Prop 20. Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. Pour tout $1 \leq k \leq n$, $\operatorname{Tr}(A^k) = 0$, si et seulement si, A est nilpotente.

Thm 21 (suite des noyaux itérées)**.** Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. Alors $(\operatorname{Ker}(u^k))_k$ est une suite strictement croissante, stationnaire à partir d'un rang p.

Cor 22. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ nilpotent, d'indice de nilpotence r. Alors il existe des sous-espaces $F_r, \dots, F_1$ tels que :

1. Pour tout $1 \leq k \leq r$, $F_k \oplus \mathrm{Ker}(u^{k-1}) = \mathrm{Ker}(u^k)$
2. Pour tout $2 \leq k \leq r$, $u(F_k) \subseteq F_{k-1}$.

Lemme 23 (Lemme de Fitting - DEV 1)**.** Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. Il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $E = \mathrm{Ker}(u^p) \oplus \mathrm{Im}(u^p)$

Thm 24 (Décomposition de Fitting - DEV 1)**.** Soient $u \in \mathscr{L}(E)$ et $p \in \mathbb{N}^*$ tels que $E = \mathrm{Ker}(u^p) \oplus \mathrm{Im}(u^p)$. Alors $v := u|_{\mathrm{Ker}(u^p)}$ est nilpotent, et $w := u|_{\mathrm{Im}(u^p)}$ est inversible. Si l'on note $F := \mathrm{Ker}(u^p)$ et $G := \mathrm{Im}(u^p)$, on appelle $((F,G),v,w)$ la décomposition de Fitting de u.

Cor 25 (Cardinal du cône nilpotent - DEV 1)**.** Soient $\mathbb{F}_q$ le corps fini à q éléments et $\mathcal{N}_n(\mathbb{F}_q)$ l'ensemble des matrices nilpotentes de $M_n(\mathbb{F}_q)$. Alors $N_n := |\mathcal{N}_n(\mathbb{F}_q)| = q^{n(n-1)}$.

II.2 Exponentielle d'une matrice nilpotente

Ici, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Prop 26. Si $N \in M_n(\mathbb{K})$ est nilpotente, d'indice de nilpotence p, alors $\exp(N) = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{N^k}{k!}$

Déf 27. Soit $N \in M_n(\mathbb{K})$ une matrice nilpotente d'indice p. Le logarithme de la matrice $I_n + N$ est la matrice $\ln(I_n + N) = \sum_{k=1}^{p-1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} N^k$

Prop 28. Soit $N \in M_n(\mathbb{K})$ une matrice nilpotente d'indice p. Alors $\exp(N) - I_n$ et $\ln(I_n + N)$ sont nilpotentes, et

$$e^{\ln(I_n+N)} = I_n + N, \ \ln(e^N) = N$$

Cor 29. Soit $N \in M_n(\mathbb{K})$ nilpotente vérifiant $e^N = I_n$. Alors $N = 0$.

III Applications

III.1 Décomposition de Dunford

Thm 30 (Décomposition de Dunford)**.** Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. On suppose que u trigonalisable. Alors il existe un unique couple $(d,n) \in \mathscr{L}(E)^2$ tels que :

1. $u = d + n$
2. d est diagonalisable
3. n est nilpotent
4. $d \circ n = n \circ d$

De plus, d et n sont des polynômes en u.

Prop 31. Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Si la décomposition de Dunford de A est $D+N$, alors e^A admet une décomposition de Dunford qui est $e^A = e^D + e^D(e^N - I_n)$

Cor 32 (Surjectivité de l'exponentielle de matrices complexes)**.** Pour tout $A \in GL_n(\mathbb{C})$, il existe $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $A = e^{P(A)}$.

Thm 33 (Dunford effectif - DEV 2)**.** Supposons que $\mathbb{K}$ est de caractéristique nulle. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ trigonalisable, de décomposition de Dunford $D + N$. On pose $P := \frac{\chi_A}{\chi_A' \wedge \chi_A}$ et on considère la suite $(A_r)_r$ définie par $A_0 = A$, et $A_{r+1} = A_r - P(A_r)P'(A_r)^{-1}$. Alors cette suite est bien définie, est stationnaire pour tout $r \geq log_2(n)$, et tend vers D.

III.2 Réduction de Jordan (cas nilpotent)

Déf 34. Le bloc de Jordan de taille $m \in \mathbb{N}^*$ est la matrice $J_m = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in M_m(\mathbb{K})$

Prop 35. J_m est nilpotente, d'indice de nilpotence m.

Thm 36 (Réduction de Jordan - cas nilpotent)**.** Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ nilpotent. Il existe $r \in \mathbb{N}^*$ et $d_1 := \deg \mu_u \geq d_2 \geq \ldots \geq d_r$ et une base de E dans laquelle la matrice de u est diagonale par blocs, avec les blocs $J_{d_1}, \ldots, J_{d_r}$. De plus, une telle écriture est unique. Cette matrice est appelée matrice réduite de Jordan de u.

Cor 37. Deux endomorphismes nilpotents sont semblables, si et seulement si, ils admettent la même matrice réduite de Jordan.

Cor 38. Il existe un nombre fini de classes de similitudes dans $\mathcal{N}(E)$.

Cor 39. $N \in M_n(\mathbb{C})$ est nilpotente, si et seulement si, N et $2N$ sont semblables.

IV Topologie

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On munit $M_n(\mathbb{K})$ d'une norme quelqconque.

Lemme 40. L'application $M_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}_n[X]$, $A \mapsto \chi_A$ est continue.

Thm 41. L'ensemble des matrices trigonalisables réelles est fermé dans $M_n(\mathbb{R})$. De plus, c'est l'adhérence des matrices diagonalisables réelles.

Cor 42. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ et $ad_A : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$, $M \mapsto AM - MA$. Alors A est trigonalisable, si et seulement si, ad_A est trigonalisable.

Bibliographie

[CP22] Philippe Caldero et Marie Peronnier. *Carnet de voyage en Algébrie*. Calvage et Mounet, 2022.

[Gou08] Xavier Gourdon. *Algèbre*. 2008.

[MM22] Roger Mansuy et Rached Mneimé. *Algèbre linéaire. Réduction des endormorphismes*. 2022.